Résumé de Cours 11

Déterminant d'une Matrice Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 1$. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on l'exprime comme $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)$, où $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Lemme Il existe une application $F_n : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non triviale telle que

1. (multi-linéarité) pour $1 \leq j \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} &F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}'_j}^{j}, \cdots, \mathbf{a}_n) \\ =&F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}_j}^{j}, \cdots, \mathbf{a}_n) + \lambda F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}'_j}^{j}, \cdots, \mathbf{a}_n), \end{aligned}$$

2. (anti-symétrie) pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$F(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) F(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n).$$

Remarque L'antisymétrie pour $\sigma = (i, j)$ implique que

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}_j}^{i}, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}_i}^{j}, \cdots, \mathbf{a}_n) = -F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}_i}^{i}, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}_j}^{j}, \cdots, \mathbf{a}_n).$$

En particulier, on a

$$F(\mathbf{a}_1, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}}^{i}, \cdots, \overbrace{\mathbf{a}}^{j}, \cdots, \mathbf{a}_n) = 0.$$

Définition La valeur de $A \in M_n(\mathbb{K})$ par F_n du lemme ci-dessus normalisée par $F_n(I_n) = 1$ est dit le **déterminant** de A, noté $\det A$, ou encore $|A|$. Pour une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$, il est aussi noté comme suit

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Remarque Voici une formule explicite du déterminant de $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} \det\ A &= \sum_{n \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{n \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}. \end{aligned}$$

D'après cette remarque, on a

Lemme Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det({}^t A) = \det(A)$. $\square$

En particulier, ce lemme implique que

`le déterminant est non seulement multilinéaire et antisymétrique pour les colonnes mais aussi pour les lignes !`

Le lemme suivant est aussi important :

Lemme Pour $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

Un corollaire utile est

Corollaire Si une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, on a $\det(A) \neq 0$. □

Pour calculs pratiques, le lemme suivant est aussi utile :

Lemme Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$ une matrice bloc-diagonale, où $A_i \in M_{m_i}(\mathbb{K})$ avec $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leq i \leq r$. Alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i).$$

Interprétation géométrique (non-traitée en cours, mais importante)

Pour une matrice carrée $A = (\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n) \in M_n(\mathbb{R})$, soit

$$\Gamma_A := \{\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{a}_i | 0 \leq t_i \leq 1\}$$

le **parallélotope** engendré par $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. En particulier, dans le cas $n = 2$, ce n'est que le **parallélogramme** engendré par $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

La multi-linéarité et l'anti-symétrie du déterminant implique que

$$|\det A| = \mathrm{vol}(\Gamma_A),$$

où $\mathrm{vol}(\Gamma_A)$ signifie le volume de Γ_A.

Preuve pour $n = 2$ Soit $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \in M_2(\mathbb{R})$. Par anti-symétrie, on a

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 + t\mathbf{a}_1) = \det(\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, la forme des parallélogrammes changent mais ses aires sont toujours les mêmes. En appliquant ces transformations, on peut se ramener au cas où Γ_A devient un rectangle, en particulier, A est une matrice diagonale $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ qui a le déterminant égal à pq. Évidement, l'aire du rectangle engendré par $(p, 0)$ et $(0, q)$ est $|pq|$, ceci implique que $|\det(A)| = \mathrm{vol}(\Gamma_A)$. □

Remarque Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Par définition, on a $\Gamma_A = u(\Gamma_{I_n})$. Découpant la carte cartésienne en petits morceaux, on voit que, pour tout $D \subset \mathbb{R}^n$ dont cela a du sens de parler de son volume, la formule suivante est valable :

$$\mathrm{vol}(u(D)) = |\det A| \mathrm{vol}(D).$$

Les détails seront traités plus tard en analyse. □