# Fiche 6 bis : Revisions

---

**Exercice 1.** On considère $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_2\,, \quad f(e_2) = e_3\,, \quad f(e_3) = e_1\,,$$

où $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

a) Montrer que $f$ est bijective.

b) Montrer que $f^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^3}$.

c) Démontrer que $F := \{u \in \mathbb{K}^3 \,:\, f(u) = u\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ et déterminer sa dimension.

**Exercice 2.** Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $f^2 = f$ (on dit que $f$ est un projecteur).

a) Démontrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} - f$ est aussi un projecteur.

b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n} - f) = \mathrm{Im} f$.

c) Démontrer que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.

d) Donner un exemple de projecteur $p$ dans $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 3.** Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + 2x_3)\,.$$

a) Quelle est la matrice $M$ de $u$ dans la base canonique ?

b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}\, u$.

c) En déduire $\mathrm{rang}(u)$.

d) Soit $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrer que $u(v) = 3v$. En déduire une solution particulière du système

$$\begin{cases} \alpha = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \beta = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \gamma = -x_1 - x_2 + 2x_3\,. \end{cases}$$

En utilisant la question b), trouver toutes les solutions du système précédent.

e) Si $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (2, -1, -1)$ et $f_3 = (-1, 2, -1)$, montrer que $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

f) Calculer les coordonnées des vecteurs $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(f_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice $N$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}'$.

g) Calculer la matrice de changement de base $P$ de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$.

h) Calculer $P^{-1}$.

i) Exprimer la matrice de $u^{10}$ relativement à la base canonique en fonction de $M$. Calculer $N^{10}$ et en déduire $M^{10}$.

**Exercice 4.** Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = -e_1 + 2e_3\,,\ f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3\,,\ f(e_3) = 2e_2 - e_3\,.$$

a) Déterminer la matrice de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) $f$ est-elle bijective ?

c) Montrer que $\mathcal{B}' = \{e_1+e_2, e_2+e_3, e_1+e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.

**Exercice 5.** On note $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que $\varphi$ est linéaire et déterminer son noyau.
2. Montrer que $\varphi$ envoie le sous-espace $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même. Déterminer le noyau et l'image de la restriction $\varphi_n$ de $\varphi$ au sous-espace $\mathbb{C}_n[X]$. Quelle est l'image de $\varphi$ ?

**Exercice 6.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$ et soit $f$ l'application linéaire de $E$ dans $E$ définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3. \end{aligned}$$

a) Calculer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice de $f \circ f$ dans cette même base.

b) En déduire que $f$ est bijective.

**Exercice 7.** a) En fournissant une matrice équivalente échelonnée, déterminer le rang de chacune des matrices réelles suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

b) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(-1, 4, 3)$, $(7, 2, 9)$ et $(0, 1, 1)$ ?

c) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} -x & +7y & & = & 0 \\ 4x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & +9y & +z & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

d) Et quelle est celle du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x & +4y & +3z & = & 0 \\ 7x & +2y & +9z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

e) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & +4t & +5u & = & 0 \\ 6x & +7y & +8z & +9t & +10u & = & 0 \\ 11x & +12y & +13z & +14t & +15u & = & 0 \\ 16x & +17y & +18z & +19t & +20u & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

f) Et quelle est celle du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x & +6y & +11z & +16t & = & 0 \\ 2x & +7y & +12z & +17t & = & 0 \\ 3x & +8y & +13z & +18t & = & 0 \\ 4x & +9y & +14z & +19t & = & 0 \\ 5x & +10y & +15z & +20t & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

**Exercice 8.** On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y, z). \end{array}$$

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = ((1, 2), (-1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_3$ et de $\mathcal{B}_3$ vers $\mathcal{B}_2$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B}_4 = ((1, 0, -1), (4, 0, 3), (1, 1, 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_4$ et de $\mathcal{B}_4$ vers $\mathcal{B}_1$.
6. Déterminer la matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$.

**Exercice 9.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le rang de $A$ et en déduire que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$.
b) Déterminer un vecteur non nul $f_1$ appartenant $\operatorname{Ker} u$.
c) Trouver un vecteur $f_2$ non nul tel que $u(f_2) = -2f_2$. puis un vecteur $f_3$ non nul tel que $u(f_3) = 4f_3$.
d) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice de passage $P$ de la base $\mathcal{B}$ la base $\mathcal{B}'$.
e) Calculer la matrice $A'$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}'$.
f) Calculer $A'^{100}$, puis $u^{100}(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

**Exercice 10.** Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$A \mapsto A +^t A.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.