

Fiche 5 : Applications linéaires I

Exercice 1. Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{b)} & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{c)} & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 & (x, y) \longmapsto (y, x) & & (x, y) \longmapsto (x, a) & & (x, y) \longmapsto (ax, ay) \\
 \text{d)} & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{e)} & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & & \\
 & (x, y) \longmapsto (x + a, y + a) & & (x, y, z) \longmapsto (x + z, y + z) & & \\
 \text{f)} & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{g)} & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & \\
 & (x, y, z) \longmapsto (x^2, y^2, z^2) & & x \longmapsto \sin x & &
 \end{array}$$

Exercice 2. Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^5 définie pour tous α, β réels par

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta)$$

- a) Montrer que f est une application linéaire.
- b) Déterminer $\text{Ker } f$ et préciser sa dimension.
- c) Déterminer $\text{Im } f$ et préciser sa dimension.

Exercice 3. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w) .

- a) Déterminer une base de F .
- b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

$$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

Montrer que f est un endomorphisme¹ de \mathbb{R}^3 .

- c) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et une base de $\text{Im } f$. Préciser le rang de f .
- d) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?
- e) Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\text{Im } f$?
- f) Déterminer une base et la dimension de $F \cap \text{Im } f$

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E .

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m . Soit (v_1, v_2, \dots, v_p) une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n .

- Montrer que si (v_1, v_2, \dots, v_p) est une famille génératrice de \mathbb{R}^n alors $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im} f$.
- Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille libre alors (v_1, v_2, \dots, v_p) est une famille libre.
- Montrer que si f est injective et si (v_1, v_2, \dots, v_p) est une famille libre alors $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille libre.

Exercice 5. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de \mathbb{R}^3 , et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \phi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_2) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \phi(\vec{e}_3) &= \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Écrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 6. Soit u l'application de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

- Montrer que u est une application linéaire.
- Déterminer une base et la dimension du noyau de u . Est-elle injective ?
- En déduire que u est surjective.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour $p \leq n$ on note e_p le polynôme X^p . Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

- Montrer que f est une application linéaire de E dans E .
- Pour $p \leq n$, calculer $f(e_p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\text{Im} f$ et le rang de f .
- Soit Q un polynôme de $\text{Im} f$; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\text{Im} f$ et de $\ker f$.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = -e_1, \quad f(e_3) = e_3.$$

- a) Déterminer l'image par f d'un élément (x, y, z) de \mathbb{R}^3 .
- b) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
- c) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient u et v deux endomorphismes de \mathbb{R}^n tels que $u \circ v = 0$. Montrer que

$$\text{Im } v \subseteq \text{Ker } u.$$

En déduire que

$$\text{rang}(u) + \text{rang}(v) \leq n.$$

Exercice 3. Donner des exemples d'applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 vérifiant :

- a) $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
- b) $\text{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
- c) $\text{Im}(f)$ inclus strictement dans $\text{Ker}(f)$.

Exercice 4. a) Soit f une application linéaire surjective de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^2 . Quelle est la dimension du noyau de f ?

b) Soit g une application injective de \mathbb{R}^{26} dans \mathbb{R}^{100} . Quelle est la dimension de l'image de g ?

c) Existe-t-il une application linéaire bijective entre \mathbb{R}^{50} et \mathbb{R}^{72} ?

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Quand la réponse est oui, sont-elles surjectives, injectives ? Déterminer leur image et leur noyau.

$$\begin{array}{lll}
 f : \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\
 P & \longmapsto & P(X+i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lll}
 g : \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\
 P & \longmapsto & P(X^2)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lll}
 h : \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\
 P & \longmapsto & P'
 \end{array}$$