2. Espaces vectoriels

Exercice 1 On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda x_1, 0)\,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Dans les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E :

1. $E = \mathbb{R}^2$, $\quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$, $\quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.
3. $E = \mathbb{R}^2$, $\quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}^3$, $\quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
5. $E = \mathbb{R}^3$, $\quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
6. $E = \mathbb{R}^3$, $\quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = x\}$.

Exercice 3 Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$;

b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$.

c) $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$ où $m \in \mathbb{R}$

Exercice 4 Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$.

b) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$.

c) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$.

d) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, -2, -1)$.

e) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque la réponse est négative, on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 5 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x + y + z + t = 0\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x + y = z + t\} \\ H &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ :\ a = b = c = d\}\,. \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F + G$?

c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 6 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = z = 0\} \\ F_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 0\} \\ F_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + z = y\} \\ F_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y\}\,. \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Déterminer $F_2 + F_3$.

c) Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?

d) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

e) Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.

f) Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions d) et e) ?

g) Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

Exercice 7 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t,-t,0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0,t,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t,0,-t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
2. La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est-elle directe ? Vérifier votre réponse.

Exercice 8 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2,-3,1)$ et $u_2 = (2,-2,1)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Démontrer que le vecteur $u = (0,1,0)$ est élément de F, mais que $v = (0,0,1)$ ne l'est pas.

c) Calculer les composantes du vecteur $w = (0,4,0) \in F$ dans la base (u_1, u_2).

d) Exprimer qu'un vecteur $v = (x,y,z)$ appartient F par une équation en x, y, z.

f) Indiquer la nature géométrique de F.

Exercice 9 Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10

a) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Donner une base.

b) Montrer que les vecteur suivants de $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (1+i, 1+2i, i),\ v_2 = (2, 4-i, -1),\ v_3 = (0, -1+2i, 2+i)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et sont libres si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Pourquoi les polynômes 1, X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3 ? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 12 Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 13 Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels. Montrer que P et ses n dérivées forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14 Soit $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler les définitions de l'addition et de la multiplication externe sur $\mathbb{R}^{[a,b]}$ et dire lequels de ces sous-ensemble sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{[a,b]}$:

a) $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) = \{\text{fonctions continues } f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$;
b) ensemble des applications surjectives (resp. injectives) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$;
c) ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$;
d) ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$.

Exercice 15 Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2\ u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
b) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
c) Tenant compte du fait que les suites de $\mathcal{E}$ sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
d) Déterminer les suites de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 16

a) Décrire les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}$; puis de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
b) Dans $\mathbb{R}^3$ donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercices à préparer pour les contrôles.

Les premiers 2 exercices sont à préparer pour le contrôle de la semaine du 24 février. Les suivants pour la semaine du 24 mars. Les valeurs numériques pourront être modifiées pour les contrôles.

Exercice 17 On considère les ensembles

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + z = -y\} \quad \text{and} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y = 1\}.$$

Pour chacun, indiquer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ou non.

Exercice 18 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y dans $\mathbb{R}$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$?

Exercice 19 On considère les vecteurs $u = (4, -2, 0)$, $v = (3, 0, 3)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-2, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{F} = (u, v, w, z)$ est-elle libre ou liée ? Calculer $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Vect}(u, v, w, z)$.

Exercice 20 Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = 0\}, \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y - t = z = 0\}. \end{aligned}$$

a) Donner une base de F, G, et $F + G$.
b) Enoncer la formule de Grassmann et en déduire $\dim(F \cap G)$.
c) Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice 21 On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 2, -1), v_4 = (0, 0, 1)\}.$$

a) On pose $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de V.
b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.
c) Exprimer qu'un vecteur (x, y, z) appartient à V par une equation en x, y, z.
d) En déduire du point c) ou montrer directement que le vecteur $w_1 = (2, -1, 1) \notin V$.

Exercice 22 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, des polynômes réels de degrés au plus égal à 3, on considère la famille suivante :

$$\mathcal{V} = \left(P_1 = (1 + X), P_2 = (1 + X^3), P_3 = (1 - X^3)\right).$$

a) Démontrer que $\mathcal{V}$ est une famille libre.
b) Ecrire les vecteurs 1 et $3 + X^3$ comme combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $\mathcal{V}$.
c) Complèter la famille $\mathcal{V}$ en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 23 Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\},$$

$$G = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 4)\}.$$

a) Déterminer une base de F et une base de G.
b) Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.
c) La somme $F + G$ est-elle directe ? Motiver votre réponse.