TD 2 : Géométrie du plan et de l'espace.

I. ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS.

EXERCICES OBLIGATOIRES.

Exercice 1 (Combinaisons linéaires).

Montrer que le vecteur $\vec{u} = (-4, -3, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs

$$\vec{e_1} = (1, 1, 0),\ \vec{e_2} = (0, 1, 1),\ \vec{e_3} = (1, 0, 1).$$

[C'est-à-dire que $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme $\vec{u} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.]

Exercice 2 (Vecteurs linéairement indépendants).

Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ?

a) $u = (-1, 2)$ et $v = (3, -5)$.
b) $u = (2, -1)$ et $v = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.
c) $u = (1, -2, 1)$ et $v = (-3, 6, -3)$.
d) $u = (3, -1, 1)$ et $v = (6, -2, -2)$.
e) $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (0, 1, -1)$.
f) $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (0, 3, 4)$.
g) $u = (1, -1, 3)$, $v = (-2, 1, 6)$ et $w = (0, 0, 1)$.
h) $u = (1, -1, 3)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$.

Exercice 3 (Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$).

1. Les vecteurs $\vec{e_1} = (-1, 1)$ et $\vec{e_2} = (1, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$? Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du point $A = (3, 4)$ dans le repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Mêmes questions pour les vecteurs $\vec{e_1} = (2, -1)$ et $\vec{e_2} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$.
2. Les vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ de l'exercice 1 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u} = (-4, -3, 2)$ dans cette base.

Exercice 4 (Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan).

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les deux vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$.
1. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. Calculer et représenter le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. Puis déterminer et représenter les deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ et de même norme.

Exercice 5 (Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace).

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, et $\vec{w} = -2\vec{k}$.

1. Représenter ces trois vecteurs puis calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{v}\wedge\vec{u}$, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ puis représenter ces vecteurs.
3. Déterminer le produit mixte $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ puis le comparer avec le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

<u>EXERCICES FACULTATIFS.</u>

Exercice 6 (Base de $\mathbb{R}^3$).

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u}=(1,2,0)$ et $\vec{v}=(-6,0,2)$.
1. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants.
2. Déterminer un vecteur $\vec{w}\in R^3$ linéairement indépendant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 (Base de vecteurs dans l'espace).

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les trois vecteurs

$$\vec{u}=\tfrac{1}{2}\vec{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{k},\ \vec{v}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i}-\tfrac{1}{2}\vec{k},\ \vec{w}=-\vec{j}.$$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les normes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; puis les produits scalaires $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{v}\cdot\vec{w}$.

Exercice 8 (Identités notables du calcul vectoriel).

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, démontrer les égalités suivantes :
1. $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$, et $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$.
2. $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|+(\vec{u}\cdot\vec{v})^2=\|\vec{u}\|^2\cdot\|\vec{v}\|^2$.
3. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$.
4. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$.
[Indication : Fixer un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et effectuer un calcul composante par composante.]

II. GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN ET DE L'ESPACE.

<u>EXERCICES OBLIGATOIRES.</u>

Exercice 9 (Droites du plan, 1).

Dans le plan, on considère les deux points $A=(1,2)$ et $B=(-1,0)$. Déterminer :
1. l'équation de la droite Δ passant par A et B ;
2. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O ;
3. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par O ;
4. la distance entre A et B ;
5. la distance du point $C=(1,1)$ à la droite (AB) ;
6. [Facultatif] l'aire du parallelogramme de côtés $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Exercice 10 (Droites du plan, 2).

Dans le plan, on considère le point $A = (5, 3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$. Déterminer :

1. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par A ;
3. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par A ;
4. la distance du point A à la droite Δ ;
5. la projection orthogonale de A sur Δ.

Exercice 11 (Plans de l'espace).

Dans l'espace, on considère le point $A = (-1, 1, 2)$. Déterminer les équations des plans suivants :

1. le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;
2. le plan passant par A et parallèle au plan d'équation $3x - 2y + 4z - 5 = 0$;
3. le plan passant par A, $B = (1, 2, -1)$ et $C = (3, 0, -1)$.
4. la distance du point $E = (1, 1, 0)$ au plan (ABC).

Exercice 12 (Droites de l'espace).

Soient $A = (1, 0, 2)$, $B = (0, 1, 1)$ et $C = (1, -1, 0)$ trois point de l'espace. Déterminer :

1. l'écriture paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$;
2. l'intersection de la droite Δ avec le plan d'équation $z = 0$;
3. le système d'équations cartésiennes caractérisant la droite Δ ;
4. l'équation du plan contenant la droite Δ et passant par O ;
5. la distance du point $E = (1, 2, 3)$ à la droite Δ.
[Indication : on commence par chercher l'équation du plan passant par E et orthogonal à Δ.]
6. [Facultatif] le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

<u>EXERCICES FACULTATIFS.</u>

Exercice 13.

Soient $A = (2, 5)$, $B = (8, -1)$ et $C = (10, 5)$ trois points du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{AD} = 9\vec{i} + 3\vec{j}$ et montrer que les points B, C et D sont alignés.
2. Déterminer le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme et en calculer l'aire.

Exercice 14.

Soient A et B deux points du plan.

1. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.
(Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Considérer le mêmes questions dans l'espace de dimension 3.

Exercice 15.

Soient A et B deux points de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

Exercice 16.

Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de $\mathbb{R}^3$ de deux manières différentes :

1. géométriquement, en utilisant deux fois Pythagore ;

2. analytiquement, en utilisant la distance dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17.

Dans l'espace, on considère les deux droites

$$\Delta : \begin{cases} x - z - a &= 0 \\ y + 3z + 1 &= 0 \end{cases} \text{ et } \Delta' : \begin{cases} x + 2y + z - 2b &= 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 &= 0 \end{cases} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que les deux droites ne sont pas parallèles.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que Δ et Δ' soient concourantes. Dans ce cas, déterminer l'équation de leur plan.

Exercice 18.

1. Déterminer l'équation cartésienne des plans π contenant la droite $\Delta : \begin{cases} x &= 6 - 3z \\ x &= 3y - 7 \end{cases}$ et situés à distance 1 du point $A = (1, 1, 2)$.

2. Trouver l'équation cartésienne du plan $\pi^{\perp}$ perpendiculaire au plan $\pi : x - y + z + 24 = 0$ et contenant la droite $\Delta : \begin{cases} 2x - y + 2z + 4 &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{cases}$.

Exercice 19.

Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites

$$\Delta : \begin{cases} x + y - 3z + 4 &= 0 \\ 2x - z + 1 &= 0 \end{cases} \text{ et } \Delta' : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}.$$

Exercice 20.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que les trois plans π_1, π_2 et π_3 d'équations respectives :

$$\pi_1 : x + \lambda y - z + 1 = 0,\ \pi_2 : (\lambda + 1)x + 3y + 4z - 2 = 0 \text{ et } \pi_3 : y + (2\lambda + 4)z - (2\lambda + 2) = 0$$

contiennent une même droite