CHAPITRE I

NOMBRES COMPLEXES

§1. — CALCUL ALGÉBRIQUE SUR LES NOMBRES COMPLEXES.

1.1. Exercices traités.

EXERCICE 1. — *Calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le module, le conjugué et le carré du nombre complexe* $z = \frac{1}{1+i}$.

Solution. — Pour calculer les parties réelle et imaginaire de z, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur, d'où :

$$z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$Re(z) = \frac{1}{2}, Im(z) = -\frac{1}{2}, \bar{z} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Le module de z est alors égal à $|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On calcule z^2 en utilisant la formule du binôme :

$$z^2 = \frac{1}{4}(1-i)^2 = \frac{1}{4}(1-2i-1) = -\frac{i}{2}. \blacksquare$$

EXERCICE 2. — *Déterminer un nombre complexe* z *tel que* $z^2 = 3+4i$. *En déduire tous les nombres complexes* z *vérifiant* $z^2 = 3+4i$.

Solution. — On cherche z sous la forme $z = x + iy$, où le réel x est non nul (car sinon z^2 serait réel). L'équation $z^2 = 3 + 4i$ s'écrit :

$$x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i,$$

d'où :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$$

En tirant y en fonction de x dans la deuxième équation, et en portant la valeur obtenue dans la première, on obtient l'équation :

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Posons $u = x^2$. L'équation devient $u^2 - 3u - 4 = 0$; ses solutions sont $u = 4$ et $u = -1$. La solution $u = -1$ doit être écartée car $u = x^2$ est positif. On a donc $x^2 = 4$, d'où $x = \pm 2$ et $y = \pm 1$. Ainsi, $z_+ = 2 + i$ et $z_- = -2 - i$ sont les deux solutions de l'équation $z^2 = 3 + 4i$.■

1.2. Exercices proposés.

EXERCICE I. — *Calculer* $z = \dfrac{3-i}{4+5i}$.

Réponse. — $z = \dfrac{7}{41} - \dfrac{19}{41} i$.■

EXERCICE II. — *Déterminez les nombres complexes* z *qui vérifient* $z^2 = i$.

Réponse. — $z = \pm \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.■

§2. — FORME TRIGONOMÉTRIQUE.

2.1. Exercices traités.

EXERCICE 3. — *Calculer le module et l'argument de* $z = 1 + i\sqrt{3}$. *En déduire les parties réelle et imaginaire de* $(1 + i\sqrt{3})^5$

Solution. — On a $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. Par ailleurs :

$$\tfrac{z}{2} = \tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2} = cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\,sin(\tfrac{\pi}{3}) = e^{i\frac{\pi}{3}},$$

et $arg(z) = \frac{\pi}{3}$ modulo 2π. Pour calculer z^5, on utilise la forme trigonométrique de z. Il vient :

$$\begin{aligned} z^5 &= (2e^{i\frac{\pi}{3}})^5 = 32e^{i\frac{5\pi}{3}} = 32e^{i2\pi}e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ &= 32(cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i\,sin(-\tfrac{\pi}{3})) = 32(\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = 16 - 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

et donc :

$$Re(z^5) = 16, \quad Im(z^5) = -16\sqrt{3}\,.■$$

EXERCICE 4. — *Montrer que l'on a, pour tout réel* θ :

$$sin\theta + \sqrt{3}\,cos\theta = 2\,sin(\theta + \tfrac{\pi}{3}) \text{ et } cos\theta - \sqrt{3}\,sin\theta = 2cos(\theta + \tfrac{\pi}{3}).$$

Solution. — On part de la formule :

$$(1 + i\sqrt{3})(cos\theta + i\,sin\theta) = (cos\theta - \sqrt{3}\,sin\theta) + i(sin\theta + \sqrt{3}\,cos\theta),$$

et on écrit le premier membre sous forme trigonométrique avant d'identifier les parties réelle et imaginaire. A cet effet, on remarque que $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})(cos\theta + i\,sin\theta) &= 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\theta} = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} \\ &= 2\,cos(\theta + \tfrac{\pi}{3}) + 2i\,sin(\theta + \tfrac{\pi}{3}) \end{aligned}$$

et donc :

$$cos\theta - \sqrt{3}\,sin\theta = 2\,cos(\theta + \tfrac{\pi}{3}), \quad sin\theta + \sqrt{3}\,cos\theta = 2\,sin(\theta + \tfrac{\pi}{3}).■$$

EXERCICE 5. — *Montrer que l'on a, pour tout réel* θ :

$$cos^4\theta = \tfrac{1}{8}(cos 4\theta + 4\,cos 2\theta + 3).$$

Solution. — On a :

$$cos^4 \theta = (\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^4 = \tfrac{1}{16}(a+b)^4,$$

où $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{-i\theta}$. D'après la formule du binôme, on a :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

et donc :

$$\begin{aligned} cos^4 \theta &= \tfrac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} + 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}\right) \\ &= \tfrac{1}{16}\left((e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) + 4(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) + 6\right) \\ &= \tfrac{1}{16}\left(2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6\right) = \tfrac{1}{8}\left(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. ■

EXERCICE 6. — *Montrer que l'on a :*

$$sin\tfrac{\pi}{5} + sin\tfrac{2\pi}{5} + sin\tfrac{3\pi}{5} + sin\tfrac{4\pi}{5} = cotan\tfrac{\pi}{10}.$$

Solution. — Le premier membre est la partie imaginaire de la somme

$$e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = a + a^2 + a^3 + a^4,$$

où $a = e^{i\frac{\pi}{5}}$. La somme de la suite géométrique du second membre est égale à :

$$a + a^2 + a^3 + a^4 = a(1 + a + a^2 + a^3) = a\frac{a^4 - 1}{a - 1},$$

et donc :

$$e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{3\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}}\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}} - 1}{e^{i\frac{\pi}{5}} - 1} = e^{i\frac{\pi}{5}}\frac{e^{i\frac{2\pi}{5}}(e^{i\frac{2\pi}{5}} - e^{-i\frac{2\pi}{5}})}{e^{i\frac{\pi}{10}}(e^{i\frac{\pi}{10}} - e^{-i\frac{\pi}{10}})} = e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{sin\frac{2\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{10}}.$$

En prenant les parties imaginaires des deux membres, il vient :

$$sin\tfrac{\pi}{5} + sin\tfrac{2\pi}{5} + sin\tfrac{3\pi}{5} + sin\tfrac{4\pi}{5} = \frac{sin\frac{2\pi}{5}}{sin\frac{\pi}{10}} = \frac{cos\frac{\pi}{10}}{sin\frac{\pi}{10}} = cotan\tfrac{\pi}{10}$$

ce qui démontre le résultat. ■

2.2. Exercices proposés.

EXERCICE III. — *Mettre le nombre* $z = 1 - i$ *sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de* $(1-i)^8$

Réponse. — $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $(1-i)^8 = 16$. ■

EXERCICE IV. — *Montrer que l'on a, pour tout réel* θ :

$$\sqrt{3}\cos\theta + 3\sin\theta = 2\sqrt{3}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{6})$$

EXERCICE V. — *Montrer que l'on a, pour tout réel* θ :

$$\cos^2\theta\sin^4\theta = \tfrac{1}{32}(\cos 6\theta - 2\cos 4\theta - \cos 2\theta + 2).$$

EXERCICE VI. — *Montrer que* $\dfrac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right) \to \dfrac{2}{\pi}$ *quand* $n \to +\infty$.

Indication. — On montrera d'abord que l'on a :

$$\sin\tfrac{\pi}{n} + \sin\tfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\tfrac{(n-1)\pi}{n} = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}} \ .■$$

§3. — RACINES DES POLYNÔMES.

3.1. Exercices traités.

EXERCICE 7. — *a) Déterminer les racines du polynôme*

$$P(z) = z^2 + 2z + 5.$$

b) Montrer que le polynôme $Q(z) = z^3 + 2(1-i)z^2 + (5-4i)z - 10i$ *admet une racine imaginaire pure. Déterminer les racines de* Q *et factoriser ce polynôme.*

Solution. — a) Le discriminant de P est $\Delta = -16 = (i4)^2$. Les racines de Δ sont $\sqrt{\Delta} = \pm i4$ et les racines de P sont donc :

$$z_1 = \tfrac{-2+4i}{2} = -1 + 2i, \ z_2 = \tfrac{-2-4i}{2} = -1 - 2i.$$

b) Si $z = ix$ est une racine imaginaire pure de Q , on a :

$$0 = Q(ix) = (-2x^2 + 4x) + i(-x^3 + 2x^2 + 5x - 10),$$

d'où les deux relations :

$$\begin{cases} -x^3 + 2x^2 + 5x - 10 = 0 \\ -2x^2 + 4x = 0 \end{cases}$$

De la seconde relation, on tire $x = 2$ (car $x = 0$ ne satisfait pas la première relation), et on vérifie que $x = 2$ vérifie la première équation. Il s'ensuit que $z_o = 2i$ est racine du polynôme Q. On peut donc factoriser Q sous la forme $Q(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$. Par identification des coefficients, on trouve $a = 2, b = 5$, d'où:

$$Q(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 5).$$

De la question a), il résulte que les racines de Q sont $z_o = 2i$, $z_1 = -1 + 2i$ et $z_2 = -1 - 2i$. La factorisation de Q est alors :

$$Q(z) = (z - 2i)(z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i). \blacksquare$$

EXERCICE 8. — *Factoriser le polynôme* $P(z) = z^3 - 8$ *sur le corps des complexes et sur le corps des réels.*

Solution. — Les racines de P sont solutions de l'équation $z^3 = 8 = 2^3$, et donc $z = 2u$ où u est solution de $u^3 = 1$. On cherche u sous forme trigonométrique, c'est à dire sous la forme $u = e^{i\theta}$. On a $u^3 = e^{i3\theta} = 1$, d'où $\theta = 0$ (mod $\frac{2\pi}{3}$). Ainsi, θ est égal à $0, \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$. Il s'ensuit que les valeurs de u sont :

$$u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad u_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

et les valeurs correspondantes pour les racines $z = 2u$ de P sont :

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

La factorisation de P en facteurs du premier degré sur le corps des complexes est donc :

$$z^3 - 8 = (z - 2)(z + 1 - i\sqrt{3})(z + 1 + i\sqrt{3}).$$

La factorisation de P sur le corps des réels s'obtient en multipliant les facteurs associés à des racines complexes conjuguées, soit ici :

$$z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4). \blacksquare$$

3.2. Exercices proposés.

EXERCICE VII. — *a) Résoudre l'équation* $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
b) Montrer que le polynôme $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$ *possède une racine imaginaire pure. En déduire les racines de* P *et factoriser ce polynôme.*

Réponse. — a) Les solutions sont $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
b) $z = 2i$ est racine imaginaire pure de P. On a alors la factorisation :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4),$$

et les racines de P sont $2i, \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i$. La factorisation de P est donc $P(z) = (z - 2i)(z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)$. ■

EXERCICE VIII. — *Factoriser sur le corps des complexes le polynôme :*

$$P(z) = (z - 1)^6 + (z - 1)^3 + 1.$$

Indication. — On cherchera les racines de P en posant $u = (z - 1)^3$, d'où $(z - 1)^3 = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$. Pour résoudre cette dernière équation, on notera que $1 + e^{ix} = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos\frac{x}{2}$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. ■

—