Corrigé succinct du CC1 (Sujet 1)

Exercice 1.

(1)

$$\Delta = (5+i)^2 - 4(8+i) = -8+6i.$$

Racines carrées de Δ :

$$(a+ib)^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 & (1) \\ a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = -8 & (2) \\ 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) = 6 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow 2a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm 1$.
$(1)-(2) \Rightarrow 2b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3$.
$(3) \Rightarrow a$ et b ont le même signe.
D'où les racines carrées de Δ :

$$\delta_1 = 1+3i, \;\; \delta_2 = -1-3i.$$

Les solutions de l'équation :

$$z_1 = 2-i, \;\; z_2 = 3+2i.$$

(2)(a)

$$z_0 \text{ est une solution réelle } \Leftrightarrow \begin{cases} z_0^3 - 7z_0^2 + 18z_0 - 16 = 0 & (1) \\ z_0^2 - 3z_0 + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Calculons les solutions de l'équation apparaissant dans (2). On a $\Delta = 1$ et $x_1 = 1, x_2 = 2$. En remplaçant z_0 par 1 dans l'équation (1) on a $1-7+18-16 \neq 0$ et en remplaçant z_0 par 2 dans l'équation (1) on a $2^3 - 7\times 2^2 + 18\times 2 - 16 = 0$ et donc la solution réelle est $z_0 = 2$.

(2)(b) On a

$$(z-2)(z^2+az+b) = z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$$

et par identification on obtient

$$\begin{cases} a-2 = -(7+i) \\ b-2a = 18+3i \\ -2b = -16-2i \end{cases}$$

ce qui donne $a = -(5+i)$ et $b = 8+i$.

(2)(c) On a

$$z^3 - (7+i)z^2 + (18+3i)z - 16 - 2i = (z-2)(z^2 - (5+i)z + 8 + i)$$

et par conséquent les solutions de l'équation sont $z_0 = 2, z_1 = 2-i, z_2 = 3+2i$.

Exercice 2.

(1)

$$d(A,P) = \frac{|1+2+2-14|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

(2) $\overrightarrow{u} = (1,2,2)$ est vecteur normal à P.
Soit $M = (x,y,z)$. On a

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, M = A + \lambda \overrightarrow{u}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{c} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 2\lambda + 1 \end{array} \right.$$

D'où l'écriture paramétrique :

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x = \lambda + 1, y = 2\lambda + 1, z = 2\lambda + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(3) $H = (x, y, z)$ est la projection orthogonale de A sur P ssi $H \in \Delta \cap P$.

$$H \in \Delta \cap P \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 2y + 2z - 14 = 0 \\ x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 2\lambda + 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 9\lambda + 5 - 14 = 0 \\ x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = 2\lambda + 1 \end{array} \right.$$

D'où $\lambda = 1$ et

$$H = (2, 3, 3).$$

(4)

$$d(A, P) = ||\overrightarrow{AH}|| = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Exercice 3.

(1)

$$f(e_1) = f(1, 0) = (1, 1),\ f(e_2) = f(0, 1) = (2, -2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) $\det(A) = -2 - 2 = -4$.

(3) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ a - 2c = 0 \\ b - 2d = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1/2 \\ b = 1/2 \\ c = 1/4 \\ d = -1/4 \end{array} \right.$$

et donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$