Fiche TD 4 – FONCTIONS USUELLES

Exercice 1 Linéariser $\sin^4 x$
(c'est-à-dire l'exprimer en fonction de $\sin(k\,x)$ ou de $\cos(k\,x)$ où k est un entier naturel).

Exercice 2 Résoudre

a) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$ b) $\cos(2x) + \cos x = 0$

c) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$ d) $\cos(4x) = \sin(6x)$ e) $2\sin x\cos x = \sin(5x)$

Exercice 3 1) Montrer que : $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \ln\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) = 0$

On admet que l'expression est définie pour tout nombre réel.

2) Résoudre $\ln(x+1) + \ln(2x+1) \leq \ln 2$

Exercice 4 Résoudre

a) $\frac{1}{2}(\ln x - \ln 2) = \ln\left(\frac{x-5}{2}\right)$ b) $e^{3x} - 3 = 4\,e^{-3x}$

Exercice 5 Déterminer

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ c) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

d) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ e) $\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{4}\right)$ f) $\arccos(\cos 4\pi)$

Exercice 6 Les équations suivantes ont-elles des solutions ?

Le cas échéant, les déterminer.

a) $\arccos x = -\frac{\pi}{3}$ b) $\arctan x = \frac{3\pi}{4}$ c) $\arccos x + \arccos\frac{1}{2} = \pi$

d) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin x + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e) $\arctan x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$

Exercice 7 Trouver une expression polynomiale pour chaque fonction :

a) $f(x) = \arccos(\cos x)$ pour tout x de l'intervalle $[-\pi, 0]$

b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$ pour tout x de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 8 Résoudre

a) $\operatorname{ch} x = 2$ b) $\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 3$

c) $2\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = 1$ d) $(\operatorname{ch} x)(\operatorname{sh} x) = 1$

http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=p13:tmb:page

Exercice 9 Simplifier (x est un réel positif) $\dfrac{ch(\ln x)+sh(\ln x)}{x}$

Exercice 10 1) (facultatif) Démontrer que : sh(a – b) = sh(a) ch(b) – sh(b) ch(a)

2) Calculer a) A = sh (ln ($\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)) b) (facultatif) B = ch (ln ($\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$))

3) (facultatif) A l'aide des résultats précédents, résoudre l'équation :

$$\text{ch}\, x - \sqrt{5}\ \text{sh}\, x = 2\ \text{sh}(3x)$$

Exercices facultatifs

Exercice 11 Exprimer en fonction de tan x seulement :

a) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$ b) $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ c) $\cos^2 x - \sin x \cos x$

Exercice 12 Soient a et b deux réels. Montrer qu'il existe deux constantes A et α telles que

a cos x + b sin x = A cos (x – α) quelque soit le nombre réel x.

En déduire la résolution de l'équation : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\cos(x - \dfrac{\pi}{6})$

Exercice 13 Démontrer que : a) $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout x de [- 1 , 1]

b) $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si x > 0 c) $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$ si x < 0

Exercice 14 Préciser l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) f(x) = $\arctan\dfrac{1}{x}$ b) f(x) = $\dfrac{\arcsin x}{x}$ c) f(x) = $\arccos\sqrt{x}$

d) f(x) = $\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x$ e) f(x) = $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ f) f(x) = $\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$

g) f(x) = $\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - \arctan x$ h) f(x) = $\arccos\dfrac{x}{2-x}$

Exercice 15 Soient x et y deux réels distincts, montrer que : $e^{\frac{x+y}{2}} < \dfrac{e^x + e^y}{2}$

Interpréter cette inégalité sur le graphe de la fonction exponentielle.

Exercice 16 Résoudre les systèmes suivants (x et y réels) :

a) $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$ b) $\begin{cases} chx + chy = 3 \\ shx + shy = 2 \end{cases}$