
PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

Cours

Un cours polycopié sera distribué prochainement.

Ouvrage recommandé

Le livre de F. AYRES et E. MENDELSON : *Analyse*, collection Mini Schaum's, EdiSciences, chez Dunod, Paris, 2002.

Wiki site

Un site, spécialement dédié à l'unité TMB, a été ouvert dans le portail math-info de Lyon 1. Ce site servira à déposer les notes de cours, les notes d'information et le bulletin indiquant le programme traité en cours. Pour accéder à ce site, qui est hébergé par le portail math-info, vous pouvez :

- Soit utiliser un moteur de recherche pour trouver le portail math-info de Lyon 1, puis L1, puis TMB, puis cliquer sur page de cours ;
- Soit utiliser son adresse

<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id>

puis L1, puis TMB, puis cliquer sur page de cours.

Programme traité lors du cours du 14 février 2012

Nombres complexes

Construction des nombres complexes. Addition et multiplication des nombres complexes. Inverse d'un complexe non nul. Représentation des points du plan par des nombres complexes. Interprétation de la somme de deux nombres complexes. Forme trigonométrique d'un complexe non nul. Formule d'Euler. Interprétation géométrique du produit de deux nombres complexes. Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes. Cas des équations du second degré à coefficients réels.

Programme traité lors du cours du 21 février 2012

Fin des nombres complexes

1. POLYNÔMES À COEFFICIENTS COMPLEXES : Racines, théorème de D'Alembert-Gauss, factorisation des polynômes sur le corps des complexes. Les conjugués des racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont encore des racines. Décomposition des polynômes à coefficients réels en polynômes irréductibles sur le corps des réels.

2. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES. Produit scalaire et produit mixte de deux vecteurs V et V' du plan. Expression du produit scalaire et du produit mixte au moyen des parties réelle et imaginaire de $\bar{z}z'$, où z et z' sont les nombres complexes associés à V et V' . Propriétés élémentaires du produit scalaire, inégalité de Schwarz, expression du cosinus de l'angle de deux vecteurs en fonction des vecteurs, vecteurs orthogonaux, condition d'orthogonalité de deux vecteurs, équation d'une droite passant par un point et orthogonale à un vecteur. Propriétés élémentaire du produit mixte de deux vecteurs, interprétation comme aire algébrique du parallélogramme engendré par ces vecteurs, condition d'indépendance de deux vecteurs, application à la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Programme traité lors du cours du 28 février 2012

Fonctions d'une variable réelle

1. GÉNÉRALITÉS : Notion de fonction. Graphe d'une fonction. Fonctions paires, impaires, périodiques. Exemples de fonctions (fonctions linéaires, affines, polynômes, fractions rationnelles). Rappel du plan d'étude d'une fonction (dérivée, tableau de variation, tangentes, graphe). Application à la détermination du graphe de la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$. Équation cartésienne d'une parabole donnée par son foyer et sa directrice.

2. FONCTIONS CIRCULAIRES. Définition du sinus, du cosinus, de la tangente. Graphes de ces fonctions. Valeurs remarquables des lignes trigonométriques. Formules de trigonométries usuelles (dont sinus, cosinus et tangente des arcs doubles). Calcul de $\sin a - \sin b$ et de $\cos a - \cos b$.

3. LIMITE D'UNE FONCTION. Définition. Exemple de calcul d'une limite (limite d'une fraction rationnelle en un pôle qui est une fausse singularité).

Programme traité lors du cours du 6 mars 2012

Fonctions d'une variable réelle (suite)

1. LIMITES : Notion de forme indéterminée. Calcul de la limite du quotient de $\sin x$ par x lorsque x tend vers zéro. Utilisation de la dérivée pour résoudre d'autres formes indétermi-

nées comme la limite du quotient du logarithme de $1+x$ par x lorsque x tend vers zéro. Énoncé de la règle de l'Hospital et application à la résolution de formes indéterminées.

2. FONCTIONS CONTINUES : Définition. Exemples de fonctions non continues. Fonctions dérivables. Démonstration de la continuité des fonctions dérivables. Approximation au premier ordre d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine de l'accroissement de la variable.

3. FONCTION LOGARITHME : Définition comme primitive de la fonction $1/x$ qui s'annule au point $x=1$. Unicité d'une telle fonction. Interprétation de $\ln x$ comme aire du sous-graphe de la fonction $1/x$ sur l'intervalle d'extrémités 1 et x . Étude des variations de la fonction logarithme et graphe de cette fonction. Tangente au graphe au point d'abscisse $x=1$, majoration de $\ln x$ par $x-1$. Calcul de la limite du quotient de $\ln x$ par x quand x tend vers l'infini. Calcul de la limite du produit de $\ln x$ par x quand x tend vers zéro. Croissance comparée du logarithme et de la fonction puissance.

Programme traité lors du cours du 13 mars 2012

Fonctions d'une variable réelle (suite)

1. FONCTIONS RÉCIPROQUES : Réciproque d'une fonction injective. Les fonctions strictement monotones sont injectives. Lorsqu'elles sont continues et définies sur un intervalle, leur réciproque est définie sur l'intervalle image et est continue. Le graphe de la fonction réciproque est le symétrique du graphe de la fonction de départ par rapport à la première bissectrice. Dérivation des fonctions réciproques. Application à la fonction racine carrée (définition comme réciproque de la fonction puissance deux, graphe, dérivée).

2. EXPONENTIELLE : Définition comme réciproque de la fonction logarithme. Graphe et dérivée de l'exponentielle. Exponentielle d'une somme. Exponentielle et décroissance radioactive (mise en équation de la fonction nombre d'atomes radioactifs en fonction du temps et résolution complète du problème de la décroissance radioactive). Fonctions puissances. Graphes et dérivées des fonctions puissances. Croissance comparée de l'exponentielle et des fonctions puissance.

3. FONCTIONS HYPERBOLIQUES : Définition du sinus, du cosinus et de la tangente hyperboliques. Relations fondamentales de la trigonométrie hyperbolique. Analogies avec les formules de trigonométrie circulaire.

Programme traité lors du cours du 20 mars 2012

Fonctions d'une variable réelle (suite)

1. FONCTIONS HYPERBOLIQUES : Dérivée et graphe des fonctions hyperboliques. Nouvelle définition des fonctions hyperboliques à partir des points de l'hyperbole $x^2-y^2=1$.

2. FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES : Définition, étude, graphe et dérivée des fonctions Arcsinus, Arccosinus, Arctangente.

3. DÉRIVÉES : Fonction dérivable, dérivée. Dérivée des fonctions constantes, des polynômes, de la fonction sinus. Différentielle. Approximation linéaire d'une fonction dérivable au voisinage d'un point.

Programme traité lors du cours du 27 mars 2012

Dérivation (suite)

1. RÈGLES DE CALCUL DES DÉRIVÉES : Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée, de la réciproque d'une fonction (rappel). Illustration sur des exemples de calcul de dérivées. Table des dérivées usuelles.

2. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS : Démonstration du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique. Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante. Si la dérivée d'une fonction est positive (resp. strictement positive), la fonction est croissante (resp. strictement croissante). Théorème de la moyenne.

Programme traité lors du cours du 3 avril 2012

Dérivation (suite)

1. DIFFÉRENTIELLE : Différentielle d'une application dérivable. Linéarisation d'une fonction dérivable au voisinage d'un point. Interprétation géométrique de la différentielle. Expression différentielle des règles de calcul des dérivées.

2. APPLICATIONS DU THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS : Variation des fonctions, méthode d'étude d'une fonction. Calculs de valeurs approchées avec estimation de l'erreur. Usage du théorème des accroissements finis pour établir des inégalités entre fonctions. Extension due à Cauchy du théorème des accroissements finis. Utilisation à la démonstration de la règle de l'Hôpital. Exemples de résolution de formes indéterminées.

3. EXTREMA DES FONCTIONS : Condition nécessaire à l'existence d'un extremum local (annulation de la dérivée). La condition n'est pas suffisante. Recherche des extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné et dérivables sur l'intérieur. Application à des problèmes d'optimisation : dimensions d'une boîte cylindrique de volume fixé et de surface minimum, théorème de Descartes sur la réfraction des ondes monochromatiques à l'interface de deux milieux optiques.

Programme traité lors du cours du 17 avril 2012

Extrema des fonctions (fin)

Fin de la démonstration du principe de Descartes.

Formule de Taylor

Énoncé de la formule. Développement à l'ordre 1, à l'ordre 2 au voisinage d'un point. Développements au voisinage de 0 des fonctions classiques. Utilisation de ces développe-

ments pour résoudre des formes indéterminées. Exemple : calcul de la limite, quand x tend vers 0 , du quotient de $\tan x - \sin x$ par x^3 . Utilisation de la formule de Taylor à l'ordre 2 dans la recherche d'un maximum. Formule de Taylor et développements en série entière. Développement en série entière de $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$.

Programme traité lors du cours du 24 avril 2012

Primitives et intégrales

Primitives d'une fonction sur un intervalle. Unicité de la primitive à une constante près. Intégrale indéfinie. Table des intégrales usuelles. Intégrale simple. Propriétés de l'intégrale simple : relation de Chasles, linéarité et croissance de l'intégrale, majoration fondamentale de l'intégrale.

Intégrale des fonctions continues

Relation entre intégrale simple et aire du sous-graphe d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné. Expression de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné comme limite de sommes de Cauchy. Valeur moyenne d'une fonction.

Technique d'intégration

Intégration par parties. Formule du changement de variable. Exemples de calculs d'intégrales utilisant ces deux techniques.

Programme traité lors du cours du 22 mai 2012

Intégration des fractions rationnelles

Décomposition d'une fraction en éléments simples. Intégration des éléments de première et seconde espèce. Exemples de calcul.

Equations différentielles d'ordre 1

Notion d'équation différentielle. Exemples d'équations différentielles d'ordre 1 (avec intégration). Equations linéaires et non linéaires.

Programme traité lors du cours du 29 mai 2012

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition des équations différentielles linéaires d'ordre 1, équation homogène associée. La solution est somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Résolution de l'équation homogène. Méthode de la variation de la constante pour rechercher une solution particulière. Exemples de résolution des équations différentielles linéaires : $y' - 2y = x$ et $y' + (\tan x)y = \cos x$.

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Équation homogène associée. La solution est somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Résolution de l'équation homogène : équation caractéristique, solutions fondamentales selon la nature des racines de l'équation caractéristique. Justification du fait que la solution générale de l'équation homogène est combinaison linéaire des deux solutions fondamentales.

Exposé de la méthode de variation des constantes. Application à la résolution des équations différentielles suivantes : $y''-2y'+2y=0$, $y''-2y'+y=0$, $y''+2y'+y=e^{-t} \ln t$.

Programme traité lors du cours du 5 juin 2012

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants (fin)

Recherche d'une solution particulière lorsque le second membre est un polynôme, le produit d'un polynôme par une exponentielle, ou bien le produit d'un polynôme par un sinus ou un cosinus. Exemples : résolution des équations différentielles suivantes :

$$y''+16y=8(1-\cos(4x)), \text{ et } y''-2y'+y=\exp(t).$$

Exercices de révision

Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient variable, calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle avec un pôle réel et deux pôles complexes conjugués, calcul d'une intégrale par changement de variable permettant de d'éliminer un radical, calcul d'une intégrale indéfinie (de $\text{Arctan}x$) par intégration par parties, résolution d'une équation différentielle non linéaire du premier ordre à variables séparables.

Fin du cours