TMB - CONTRÔLE CONTINU TERMINAL DU 14 JUIN 2012

$\boxed{\text{CORRIGÉ SUCCINT}}$

EXERCICE I

QUESTION 1. Le domaine de définition de $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ est $D =]0, +\infty[$. $\blacksquare$

QUESTION 2. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$.

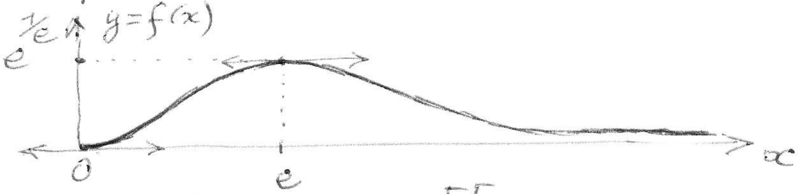
La dérivée s'annule pour $x = e$; elle est positive pour $x < e$ et négative pour $x > e$. Le tableau de variation de f est donc

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	

$\blacksquare$

QUESTION 3. Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{\ln(x)}{x} \to 0$ et donc $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \to e^0 = 1$.

Quand $x \to 0^+$, $\dfrac{\ln(x)}{x} \to -\infty$ et donc $f(x) \to 0$. Le graphe de f dans un repère orthonormé a donc l'allure suivante :



L'axe des x est une asymptote. $\blacksquare$

QUESTION 4. $\dfrac{f(x)}{x} = x^{\frac{1}{x}-1} = e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln x} = e^{(1-x)\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} e^{-\infty} = 0$. $\blacksquare$

EXERCICE II

QUESTION 1. $$\frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^2(A+B) + x(C-B) + A - C}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ C - B = -1 \\ A - C = 0 \end{cases}$$

et donc $A = C = 1$ et $B = 2$. On a donc :

$$\boxed{\frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{x^2+1}}$$ $\blacksquare$

QUESTION 2. On a :

$$\int \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \ln|x-1| + \operatorname{Arctan} x + \int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

Or $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + C^{ste}$, de sorte que : 2

$$\int_{-1}^{0} \frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \ln\left|\frac{-1}{-2}\right| + \operatorname{Arctan}(0) - \operatorname{Arctan}(-1) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -2\ln 2 + \frac{\pi}{4}$$ ∎

EXERCICE III

QUESTION 1 : $y' + (\ln x)y = 0 \iff \frac{y'}{y} = -\ln x$, d'où

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \ln x\,dx = -(x\ln x - x) + \text{constante},$$ d'où

$\boxed{y = Ce^{x - x\ln x}}$, où C est une constante réelle. ∎

QUESTION 2 : La méthode de variation des constantes donne :

$\ln x$ | $y = C(x)\,e^{x(1-\ln x)}$
$y' = C(x)\left(e^{x(1-\ln x)}\right)' + C'(x)e^{x(1-\ln x)}$

$$x^{1-x} = C'(x)e^{x(1-\ln x)}.$$ On en déduit que :

$$C'(x) = e^{\ln x}e^{-x\ln x}e^{-x}e^{x\ln x} = xe^{-x},$$ d'où

$C(x) = \int xe^{-x}dx$. Posons : $u = x$ $dv = e^{-x}dx$
$du = dx$ $v = -e^{-x}$; il vient

en intégrant par parties :

$$C(x) = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C^{ste},$$ d'où

$$y(x) = -e^{-x}(1+x)e^{x}e^{-x\ln x} + Ce^{x(1-\ln x)}$$
$$= -\frac{1+x}{x^x} + C\frac{e^x}{x^x} = -\frac{1}{x^x}(x+1-Ce^x).$$ Donc

$$y(x) = -\frac{(x+1-Ce^x)}{x^x}$$ où C est une constante arbitraire. ∎

EXERCICE IV

QUESTION 1 : Comme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, les solutions de cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sont :

$$y_H(x) = e^x(Ax+B)$$ où $A, B \in \mathbb{R}$. ∎

QUESTION 2 : On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = C\sin x$, d'où $\cos x = -2C\cos x$ et $C = -\frac{1}{2}$.
La solution générale est donc $y = y_H + y_p$, soit :

$$y(x) = -\frac{\sin x}{2} + e^x(Ax+B)$$ où $A, B \in \mathbb{R}$. ∎