Un exemple d'étude de conique.

On considère le plan euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Question:
Décrire le lieu géométrique C des points $M = O + x\vec{i} + y\vec{j}$ du plan dont les coordonnées satisfont à

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x + 2y - 1 = 0 \qquad (\star)$$

La méthode d'étude générale qui suit consiste à chercher un nouveau repère dans lequel l'équation est sous forme dite *réduite*, en particulier (cf L2) dans lequel la partie quadratique de $(\star)$ est une somme de carrés.
En posant $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, l'équation $(\star)$ s'écrit

$$^tZAZ + 2LZ - 1 = 0 \qquad (\star)$$

Etape 1: *translation* de O en $O' = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ pour éliminer les termes linéaires.
On note $Z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et on fait le changement de variables $Z = Z' + Z_0$ dans l'équation $(\star)$, ce qui donne

$$^tZ'AZ' +^t Z_0AZ' +^t Z'AZ_0 +^t Z_0AZ_0 + 2LZ' + 2LZ_0 - 1 = 0 \quad (\star)$$

Observer que $LZ' =^t (LZ') =^t Z'\,^tL$ et $^tZ_0AZ' =^t (^tZ_0AZ') =^t Z'\,^tAZ_0 =^t Z'AZ_0$ (car $^tA = A$).
L'équation s'écrit donc

$$^tZ'AZ' + 2^tZ'AZ_0 + 2^tZ'\,^tL + (^tZ_0AZ_0 + 2LZ_0 - 1) = 0 \quad (\star)$$

Les termes linéaires en Z' s'annulent ssi

$$\forall Z',\ ^tZ'AZ_0 +^t Z'\,^tL = 0$$

ce qui équivaut à

$$AZ_0 = -^tL.$$

Dans l'exemple

$$Z_0 = -A^{-1}\,^tL = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Terminologie: le point O' de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère $\mathcal{R}$ est appelé le *centre* de la conique C. Pour une conique générale avec $det\,A \neq 0$ on commence toujours par chercher le centre O' et effectuer une translation de O à O'.

En remplaçant Z_0 par sa valeur dans l'équation $(\star)$ on obtient

$$^tZ'AZ' = \frac{5}{3} \qquad (\star)$$

C'est l'équation de la conique C dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$. C'est une surface de niveau de la forme quadratique de matrice A.

Etape 2: *passage à la base de vecteurs propres de A.*
Comme toute matrice symétrique réelle, A est O_2- diagonalisable à spectre réel, i.e. il existe une matrice $P \in O_2$ (pour rappel $P^{-1} =^t P$) telle que ${}^tPAP$ soit diagonale réelle.
Dans l'exemple Sp $(A) = \{3, 1\}$ et la b.o.n. de vecteurs propres est

$$(\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j},\ \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}).$$

Dès lors la matrice de passage P s'écrit

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O_2.$$

Le changement de variables $Z' = PZ''$ donne ${}^tZ'\,AZ' =^t Z''\,{}^tPAPZ'' =^t Z'' \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Z''$.

Dans le repère $(O', \vec{I}, \vec{J})$ l'équation de la conique C devient

$$3\,x''^2 + y''^2 = \frac{5}{3} \qquad (\star)$$

C est donc une ellipse de centre O' et d'axes $O' + \vec{I}$ et $O' + \vec{J}$.