Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Algèbre IV Printemps 2012

Groupe A
Enseignant : Marianne Moulin
e-mail : marianne.moulin@univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 13H45-16H45
Salle : Salle 114 (1er étage) Quai 43.

TD 3
- Feuille d'exercice II.

Exercice 1 :

q(u)=l(u)² avec l forme linéaire, q(u) est une forme quadratique.

B(u,u)= l(u)* l(u)

B(u,u)= l(u)* l(v) l linéaire et b forme bilinéaire.

$q(u) = a_1 l_1(u)^2 + \cdots + a_n l_n(u)^2$ avec $(l_i)_{1 \leq i \leq n}$ libre.

$q(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + 2xy - 4xz + +yz \ \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}$

1. Montrons que q est une forme quadratique.

1.1.

On cherche la forme polaire

$\beta(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$

$q(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + 2xy - 4xz + yz \ \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}$

Soit u=(x,y,z) et v=(x',y',z')

$b(u, v) = yy' - 3zz' + xy' + x'y - 2x'z - 2xz' + \frac{1}{2}y'z + \frac{1}{2}yz'$

q(u)=b(u,u) il faut ensuite montrer que b est linéaire.

2. Forme associée

b car b est symétrique

3. Matrice de q dans (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 1/2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$q : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) \longmapsto ax^2 + 2axy + y^2 + 4zt - at^2 \end{array}$$

1. q est quadratique $\forall a \in \mathbb{R}$
2. pour quelles valerus de a la forme est non dégénérée

   2.1. q est non dégénérée $\Leftrightarrow$ $Ker\ q = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ Matrice de q inversible.

   $$M_q = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -a \end{pmatrix} M_q\ inversible \Leftrightarrow \det Mq \neq 0$$

   $$\det Mq = \begin{vmatrix} a & a \\ a & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = (a - a^2) * (-4) = -4a + 4a^2$$

   $$\det Mq \neq 0 \Leftrightarrow -4a + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow -4a(1-a) = 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \text{ et } a \neq 0$$

3. si q dégénérée, trouver une base de Ker(q)

   3.1. <u>$cas\ a = 0$</u>

   $$q : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) \longmapsto 2y^2 + 4zt \end{array}$$

   $$u \in Ker\ q \Leftrightarrow \text{Mq}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2t = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \quad \text{base de Ker } (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

   3.2. <u>$cas\ a = 1$</u>

   $$q : \begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) \longmapsto x^2 + 2xy + 2y^2 + 4zt - t^2 \end{array}$$

   $$u \in Ker\ q \Leftrightarrow \text{Mq}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2t = 0 \\ 2z - t = 0 \end{cases} \quad (1,-1,0,0) \text{ base de Ker(q)}$$