3. Espaces euclidiens

Exercice 1 Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel et p_F la projection orthogonale par rapport à F.

1. Soit $v \in E$. Montrer que $\forall w \in F,\ ||v - p_F(v)|| \leq ||v - w||$, autrement dit $||v - p_F(v)|| = ||p_{F^\perp}|$ est le minimum de la fonction qui à tout vecteur w de F associe sa distance à v. On note ce minimum $\mathrm{dist(v, F)}$.
2. Soit w un vecteur unitaire, $D = \mathbb{R}w$ la droite engendrée par w, H l'hyperplan orthogonal à w. Montrer que $\mathrm{dist}(v, H) = |(w \mid v)|$ et $\mathrm{dist}(v, D) = \sqrt{||v||^2 - (v \mid w)^2}$.
3. Soit P la matrice de p_F dans une base orthonormée de E. Montrer que $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.
4. Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée de E si et seulement si $S^2 = I_n$ et ${}^tS = S$.

Exercice 2 Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3.

1. Montrer que l'application

$$E \times E \to \mathbb{R}\ \ (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

   définit un produit scalaire sur E.
2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1, x, x^2, x^3)$ une base orthonormée, soit (p_0, p_1, p_2, p_3).
3. Déterminer $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ pour que l'intégrale $\int_{-1}^{1} P^2(t)dt$ soit minimale.

Exercice 3 (Theorème de Fisher-Cochran). Soit E un espace euclidien de dimension n et $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes symétriques de E. On suppose que

1. $\mathrm{rg}u_1 + \cdots + \mathrm{rg}u_p = n$.
2. $q_1(x) + \cdots + q_p(x) = (x \mid x)$ où q_i désigne la forme quadratique $q_i(x) = (x \mid u_i(x))$ pour tout i.

Montrer que $E = \mathrm{Im}\, u_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, u_p$, que les $\mathrm{Im}\, u_i$ sont orthogonaux entre eux deux à deux, et que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, u_i$.

Exercice 4 (Matrice et déterminant de Gram). Soit E un espace euclidien de dimension n. À toute famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E on associe la matrice symétrique $G = G(v_1, \ldots, v_p) = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ où $g_{ij} = (v_i \mid v_j)$. On appelle déterminant de Gram de $(v_1, \ldots, v_p)$ le nombre réel

$$\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_p) = \det G.$$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G) = rg(v_1, \ldots, v_p)$.
2. Prouver que toute permutation de $(v_1, \ldots, v_p)$ laisse invariant $\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_p)$. Prouver que si t est un nombre réel et si $i \neq j$, alors :

$$\mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_j + tv_i, \ldots, v_p) = \mathrm{Gram}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_p).$$

3. On suppose la famille $(v_1, \dots, v_p)$ libre. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. soit $v \in F$. Montrer que

$$\mathrm{dist}(v, F)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_p, v)}{\mathrm{Gram}(v_1, \dots, v_p)}.$$

On introduira pour cela la projection orthogonale sur F.