Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Algèbre IV Printemps 2012

Groupe A
Enseignant : Marianne Moulin
e-mail : marianne.moulin@univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 13H45-16H45
Salle : Salle 114 (1er étage) Quai 43.

TD 8

- Feuille d'exercice III.

- ESPACES EUCLIDIENS –

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle symétrie de E tout endomorphisme $s \in End(E)$ vérifiant $s^2 = Id_E$.

1. Montrer que

$$E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E)$$

a. Soit $x \in E$.

$y \in Ker(s - id_E)$ $y = \frac{y+s(y)}{2}$ $z = \frac{z-s(z)}{2}$

$$x = \underbrace{\frac{x+s(x)}{2}}_{\in Ker(s-id_E)} + \underbrace{\frac{x-s(x)}{2}}_{\in Ker(s+id_E)}$$

b. $Mq\ \ Ker(s - id_E) \cap Ker(s + id_E) = 0$

Soit $x \in Ker(s - id_E) \cap Ker(s + id_E)$

$$\begin{cases} (s - Id)(x) = 0 = s(x) - x \\ (s - Id)(x) = 0 = s(x) + x \end{cases} \Longrightarrow x = -x \ \Longrightarrow x = 0$$

2. On suppose E euclidien. Montrer que la symétrie s est orthogonale ssi

$$Ker(s - id_E) \perp Ker(s + id_E)$$

a. $\boxed{\text{Soit f un endomorphisme sur E (E euclidien)} \\ \underline{\text{f orthogonal}} \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle}$

S est orthogonale ssi $Ker(s - Id) \perp Ker(s + Id)$

$\langle x, y \rangle = \langle x^+ + x^-, y^+ + y^- \rangle$

$\langle x, y \rangle = \langle x^+, y^+ \rangle + \langle x^-, y^+ \rangle + \langle x^+, y^- \rangle + \langle x^-, y^- \rangle$

$$\boxed{\langle x, y \rangle = \langle x^+, y^+ \rangle + \langle x^-, y^- \rangle}$$

$S(x) = S(x^+ + x^-) = S(x^+) + S(x^-)$

$S(X) = \frac{X}{2} + S\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{X}{2} - S\left(\frac{X}{2}\right)$

$S(X) = X^+ - X^-$

$\langle S(X), S(Y) \rangle = \langle x^+ - x^-, y^+ - y^- \rangle = \langle x^+, y^+ \rangle - \langle x^-, y^+ \rangle - \langle x^+, y^- \rangle + \langle x^-, y^- \rangle$

$\boxed{\langle S(X), S(Y) \rangle = \langle x^+, y^+ \rangle + \langle x^-, y^- \rangle}$

$$\boxed{\langle S(X), S(Y) \rangle = \langle x, y \rangle}$$

$\boxed{\langle S(X), S(Y)\rangle = \langle x, y\rangle}$

$\langle x^-, y^+\rangle + \langle x^+, y^-\rangle = -\langle x^-, y^+\rangle - \langle x^+, y^-\rangle$

$2\langle x^-, y^+\rangle + 2\langle x^+, y^-\rangle = 0$

$\langle x^-, y^+\rangle + \langle x^+, y^-\rangle = 0$

$y^- \;\&\; x^- \in Ker(S + Id)$

$y^+ \;\&\; x^+ \in Ker(S - Id)$

$\forall\, x^+, x^-, y^+, y^-$ on a $\langle x^-, y^+\rangle + \langle x^+, y^-\rangle = 0$

$X^+ \in Ker(s - Id), \begin{cases} si\; x^+ = 0 \implies \langle x^-, y^+\rangle = 0\;\; x^- \perp y^+ \\ si\; y^+ = 0 \implies \langle x^-, y^+\rangle = 0\;\; x^+ \perp y^- \end{cases}$

$\implies Ker(s - Id) \perp Ker(s + Id)$

3. On suppose E euclidien. Pour $a \in E\backslash\{0\}$, expliciter la symétrie orthogonale $v \longmapsto s(v)$ d'hyperplan fixe $a^\perp$.
   a. $s : \begin{matrix} E \to E \\ X \longmapsto S(X) \end{matrix}$

      symétrie $s^2 = Id$

      $v = \underbrace{\lambda a}_{\langle a\rangle} + \underbrace{v - \lambda a}_{\langle a\rangle^\perp}$

      $B = (a, \underbrace{\quad}_{p})$

      $v = \lambda a + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$

      $P_{\langle a\rangle}(v) = \lambda a$

      $\langle a, v - \lambda a\rangle = 0$

      $\lambda = \frac{\langle a,v\rangle}{\langle a,a\rangle} = \frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2}$

      $v = \underbrace{\frac{\langle a,v\rangle}{\langle a,a\rangle} a}_{\langle a\rangle} + \underbrace{v - \frac{\langle a,v\rangle}{\langle a,a\rangle} a}_{\langle a\rangle^\perp}$

      $s(v) = v - 2\frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|} a$

Exercice 3. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ de premiers vecteurs $v_1 = (1,1,1)$.

En déduire une infinité de b.o.n de premiers vecteurs $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ [utiliser une transformation géométrique simple.]

(e_1, e_2, e_3) base canonique

$v_1 = (1,1,1)$

On cherche v_2, v_3 pour que (v_1, v_2, v_3)

$v_2 = e_2 - \frac{\langle v_1, e_2\rangle}{\|v_1\|^2} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$v_3 = v_1 \wedge v_2 = (-1,0,1)$

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}, w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|},$

(w_1, w_2, w_3) b.o. n avec $w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ rotation d'angle θ.

Exercice 4. Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤3.

1. Montrer que l'application

$$E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur E.

1.1.

fait dans la fiche

2. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, construire à partir de $(1, x, x^2, x^3)$ une b.o.n.

2.1. $(1, x, x^2, x^3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3[x]$

(P_0, P_1, P_2, P_3) b.o.n de $\mathbb{R}^3[x]$

$$P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(b(1,1) = \int_{-1}^{1} dt = 2\right)$$

$$P_1 = \frac{x - \frac{\overbrace{b(x,1)}^{0}}{\|1\|}}{\left\|x - \frac{b(x,1)}{\|1\|}\right\|} = \frac{x}{\|x\|} \quad (b(x, 1) = 0)$$

$$P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x \quad \|x\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$P_2 = \frac{x^2 - \frac{b(x^2,1)}{\|1\|} - \frac{b(x^2,x)}{\|x\|} x}{\left\|x^2 - \frac{b(x^2,1)}{\|1\|} - \frac{b(x^2,x)}{\|x\|} x\right\|} = \frac{15\sqrt{3}}{23+10\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$u_1 = 1$	$v_1 = 1$
$u_2 = x$	$v_2 = x$
$u_3 = x^2$	$v_3 = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$
$u_4 = x^3$	$v_4 = x^2 - \frac{\sqrt{6}}{5} x$

$$v_1 = u_1 = 1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle v_1, u_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, u_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = x^2 - \frac{\langle 1, x^2 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} 1 - \frac{\langle x, x^2 \rangle}{\langle x, x \rangle} x = x - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$v_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_2$$

$$v_4 = x^3 - \frac{\langle x^3, 1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} 1 - \frac{\langle x^3, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x - \frac{\langle x^3, x - \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle}{\langle x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle} \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) == x^3 - \frac{\langle x^3, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x = x^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} x$$

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, F un sous-ev et p_F la projection orthogonale sur F.

1. Soit $v \in E$. Montrer que $\forall\, w \in F$, $\|v - P_F(v)\| \leq \|v - w\|$, autrement dit $\|v - P_F(v)\| = \|P_{F^\perp}(v)\|$ est le minimum de la fonction qui à tout vecteur w de F associe sa distance à v. On note ce minimum $dist(v, F)$.

   1.1. $\|v - P_F(v)\| \leq \|v - w\| \;\; \forall w \in F$

   $v = P_F(v) + P_{F^\perp}(v)$

   $v - w = P_F(v - w) + P_{F^\perp}(v - w)$

   $v - w = P_F(v) - P_F(w) + P_{F^\perp}(v) - P_{F^\perp}(w)$

   $v - w = P_F(v) - w + P_{F^\perp}(v) - \vec{0}$

   $\|v - w\|^2 = \|v - P_F(v)\|^2 + \|P_F(v) - w\|^2$ (pythagore)

   $\|v - w\|^2 \geq \|v - P_F(v)\|^2$

   $\|v - w\| \geq \|v - P_F(v)\|$

   $\|v - P_F(v)\| = \|P_{F^\perp}(v)\|$

2. Soit w un vecteur unitaire, $D = \mathbb{R}w$ la droite engendrée par w, H l'hyperplan orthogonal à w. Montrer que $dist(v, H) = |(w|v)|$ et $dist(v, D) = \sqrt{\|v\|^2 - (v|w)^2}$.

   2.1. $dist(v, H) = |\langle w, v \rangle|$

   $dist(v, H) = \|P_{H^\perp}(v)\| = \|P_D(v)\| = \|a\| \quad v = aw + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

   $dist|\langle w, v \rangle| = |\langle (1{,}0, \ldots {,}0)(a, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \rangle| = |a|$

   $dist(v, D) = \sqrt{\|v\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$

   $dist(v, D) = \|P_H(v)\| = \sqrt{\|v\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$ (pythagore)

3. Soit P la matrice de p_F dans une base orthonormée de E. Montrer que $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

   3.1. P matrice P_F

   $P^2 = P \qquad P_F^2(v) = P_F\left(\underbrace{P_F(v)}_{F}\right) = P_F(v)$

   ${}^tP = P$

   $\begin{pmatrix} I_p & \\ & O_r \end{pmatrix} \; p = \dim F$

4. Soit S une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est la matrice d'une symétrie orthogonale dans une base orthonormée de E si et seulement si $S^2 = I_n$ et ${}^tS = S$.

   base: $(f_1, \ldots, f_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$

   $S(S(v)) = v$

   $\begin{pmatrix} \overbrace{I_p}^{F} & \overbrace{0}^{F^\perp} \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$

   $S^2 = Id \; {}^tS = S$