Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Algèbre IV Printemps 2012

Groupe A
Enseignant : Marianne Moulin
e-mail : marianne.moulin@univ-lyon1.fr
Cours : vendredi 13H45-16H45
Salle : Salle 114 (1er étage) Quai 43.

TD 4
- Feuille d'exercice II.
- FORMES BILINEAIRES ET DUALITE –

Exercice 1.

1. Soient $\frac{n(n+1)}{2}$ nombres réels $b_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Montrer que l'application :

$$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i \leq j} b_{i,j} x_i x_j$$

Méthodes :

I. Expliciter la forme bilinéaire associée

II. $B(u, v) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{q(u+v) - q(u) - q(v)}\big)$

Montrer que c'est bien une forme bilinéaire q(u)=B(u,u)

1.1. B : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(u, v) \mapsto \frac{1}{2}\left(\sum_{i \leq j} \boldsymbol{b_{i,j}(x_i + y_i)(x_j + y_j)} - \sum_{i \leq j} \boldsymbol{x_i x_j} - \sum_{i \leq j} \boldsymbol{y_i y_j}\right)$

$(u, v) \mapsto \frac{1}{2}\left(\sum_{i \leq j} \boldsymbol{b_{i,j}(x_i x_j + x_i y_j + y_i x_j + y_i y_j - x_i x_j - y_i y_j)}\right)$

$(u, v) \mapsto \frac{1}{2}\left(\sum_{i \leq j} \boldsymbol{b_{i,j}(x_i y_j + y_i x_j}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i \leq j} \boldsymbol{x_i y_j}}_{\boldsymbol{bilinéaire}} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i \leq j} \boldsymbol{x_i y_j}}_{\boldsymbol{bilinéaire}}$

Commentaire [E1]: Forme bilinéaire symétrique

Exercice 2. Soit $b: E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique non nulle de forme quadratique q

RAPPEL COURS.
VECTEUR ISOTROPE
$X\ isotrope\ \Leftrightarrow q(X) = 0$

1. Montrer qu'il existe $X \in E$ non isotrope.

1.1. b non nulle $\Longrightarrow$ $\exists (x, y) \in E \times E$ tq $b(x, y) \neq 0$ $x \geq y$ non nuls.

$\Longrightarrow b(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big) \neq 0$

$\Longrightarrow q(x + y) - q(x) - q(y) = a\ \&\ a \neq 0$

$\Longrightarrow q(x + y) - q(x - y) = a\ \&\ a \neq 0$

$\Longrightarrow q(x + y) \neq 0$ ou $q(x - y) \neq 0$

$\Longrightarrow$ $\exists u \in E$ tq $q(u) \neq 0$ $u = x + y$ ou $u = x - y$

2. Montrer que $E = Kx \oplus (Kx)^{\perp_b}$

$$\oplus \begin{array}{l} E = Kx + (Kx)^{\perp_\varphi} \ (1) \\ Kx \cap (Kx)^{\perp_\varphi} = \{0\} \ (2) \end{array}$$

2.1. $\mathbb{K}_x = \{kx | k \in \mathbb{K}, x \in E\}$

$\mathbb{K}_{x^*} = \{y \in E | b(x,y) = 0\}$

Si $x' \in \mathbb{K}x$ et $y \in (\mathbb{K}x)^{\perp_\varphi}$, $b(x',y) = b(kx,y) = kb(x,y) = 0$

Soit $z \in \mathbb{K}x \cap (\mathbb{K}x)^{\perp_\varphi}$

$z \in \mathbb{K}x \Longrightarrow \exists X \in \mathbb{R}, z = \lambda x$

$z \in (\mathbb{K}x)^o \Longrightarrow b(z,x) = 0$

$\Longrightarrow b(\lambda x, x) = \lambda(x,x) = 0$

$\Longrightarrow \lambda = 0 \; car \; b(x,x) \neq 0$ donc $z = 0$.

2.2. $\boxed{\forall u \in E}$, $u = x_0 + u_0$, avec $x_0 \in \mathbb{K}x$, $v_0 \in (\mathbb{K}x)^{\perp_\varphi}$

$\forall u \in E$ il existe $x_0 \in \mathbb{K}x$ tq $u - x_0 \in (\mathbb{K}x)^{\perp_\varphi}$

$(\mathbb{K}x)^*$: ensemble des applications linéaires $\mathbb{K}x \to \mathbb{R}$

Soit $l \in (\mathbb{K}x)^*$ $l : \mathbb{K}x \to \mathbb{R}$

$$\phi : \begin{array}{l} \mathbb{K}x \to (\mathbb{K}x)^* \\ z \longmapsto f_z : \begin{array}{l} \mathbb{K}x \to \mathbb{R} \\ v \longmapsto f_z(v) = b(z,v) \end{array} \end{array}$$

$\phi \; est \; un \; isomorphisme \begin{cases} \dim(\mathbb{K}x) = \dim(\mathbb{K}x)^* \; (surjectif) \\ f_z \; est \; régulière \; car \; \mathbb{K}x \; non \; isotrope \end{cases}$

$\underline{\phi \; est \; injectif}$: soit z tel que $\phi(z) = 0$ donc $\forall v \in \mathbb{K}x$, $b(v,z) = 0$, $v \in \mathbb{K}x$ donc $v = \lambda x$ et $z \in \mathbb{K}x$ donc $z = \mu x \Longrightarrow \lambda.\mu b(x,x) = 0 \Longrightarrow \mu = 0 \Longrightarrow z = 0 \Longrightarrow Ker\phi = \{0\}$

comme $\phi \; est \; un \; isomorphisme$, $\exists \, x_0 \in \mathbb{K}x$, $l = \phi(x_0) \; (*)$. Donc $\forall v \in \mathbb{K}x$,

$b(u,v) = b(x_0,v) \Longrightarrow b(u,v) - b(x_0,v) = 0$

$\Longrightarrow b(u - x_0, v) = 0 \; \forall v \in \mathbb{K}x$

donc comme $u - x_0$ annule le v, on a $(u - x_0) \in (\mathbb{K}x)^{\perp_b}$

$(*) \; \phi(x_0) \; = b(x_0,v) \;\; l(v) = b(x_0,v)$

Donc n'importe quel $u \; de \; E$, s'écrit $u = \underbrace{x_0}_{\in \mathbb{K}x} + \underbrace{(u - x_0)}_{\in (\mathbb{K}x)^{\perp_b}}$

Alors on a bien une somme directe

on aurait aussi pu faire:

Soit $u \in E$

on cherche $x_0 \in \mathbb{K}x / \; u - x_0 \in (\mathbb{K}x)^{\perp_\varphi}$

$x_0 = \frac{b(x,u)}{b(x,x)} x \qquad b(x,x) \neq 0$

$b(x, u - x_0) = b(x,u) - b(x,x_0) = b(x,u) - \frac{b(x,u)}{b(x,x)} b(x,x) = 0$

3. Quels théorème important de cours peut-on démontrer à l'aide des questions précédentes
   Théorème du rang $\dim E = rg(b) + \dim Ker\ (b) = \dim\big(Im(b)\big) + \dim Ker\ (b)$.

   $u \in E$ tq $E = U \oplus Ker(f)$ on va montrer que $U \sim Im(\,)$
   $\dim E = \dim U + \dim(Ker(b)) = \dim(Im\ U) + \dim(Ker\ b)$
   Mais on a certainement pas $\dim E = \dim(Im\ b) \oplus \dim(Ker\ b)$

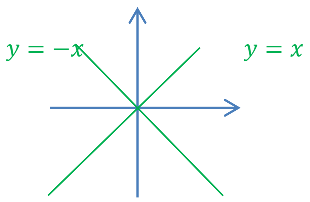
   $b_{f|u}: \begin{array}{c} U \to Im \\ u \longmapsto f(x) \end{array}$ f linéaire. Est-ce un isomorphisme ?

$\longrightarrow$ $f|_u$ *est surjective par construction*
$\longrightarrow$ $\forall x, y \in U,\ f|_u\,(x) = f|_u(y)$
$\Longrightarrow$ $f|_v\,(x) - f|_v(y) = 0 \Longrightarrow\ f|_v(x-y) = 0 \Longrightarrow (x-y) \in Kerf$
Or$(x-y) \in U$ et $U \cap Ker\ f = \{0\}$ car c'est en somme directe.
donc $x - y = 0$ et donc $x = y$ et $f|_v$ est injective.

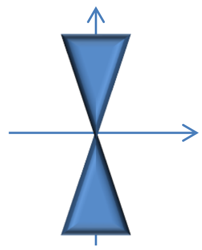
Exercice 4. Faire une figure du cône des formes quadratiques $q_1: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow x^2 - y^2 \end{array}$ et $q_2: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longrightarrow x^2 + y^2 - z^2 \end{array}$.

RAPPEL COURS.
<u>CONE ISOTROPE</u>
$Co(q) = \{x \in E, q(x) = 0\}$
Si $x \in Co(q) \Longrightarrow kx \in Co(q)$
$Ker\ q \supset Co(q)\ Si\ X \in Ker\ q$ alors $\forall y \in E\ b(x,y) = 0$ en particulier $b(x,x) = q(x) = 0$

$q_1: \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow x^2 - y^2 \end{array}$
$u = (x,y) \in Co(q_1)$
$\Leftrightarrow q_1(u) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 = y^2$
$\Leftrightarrow y = \pm x$



$q_1: \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \longrightarrow x^2 + y^2 - z^2 \end{array}$
$u = (x,y,z) \in Co(q_2)\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2$
C'est un cône.



Exercice 5. Ecrire les fq sur $\mathbb{R}^3$ suivantes sous forme réduite.

1. $q_1\,(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

1.1. $q_1\,(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

$q_1\,(x, y, z) = (x + y + z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 2yz$

$q_1\,(x, y, z) = (x + y + z)^2 - y^2 - z^2$

$l_1(x, y, z) = x + y + z$ $\quad$ $rg(q_1) = 3$

$l_2(x, y, z) = y$ $\quad$ $Ker(q_1) = \{0\}$

$l_3(x, y, z) = z$ $\quad$ Signature$(q_1) = (1,1)$

1.2. **Base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q_1**

(u_1, u_2, u_3) tels que $b(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

(u_1, u_2, u_3) tels que $l_i(u_j) = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

$$\begin{cases} l_1(x, y, z) = A \\ l_2(x, y, z) = B \\ l_3(x, y, z) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = A \\ y = B \\ z = C \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_1 = (1,0,0) \\ u_2 = (-1,1,0) \\ u_3 = (-1,0,1) \end{cases} \begin{matrix} B = 1 \; A = C = 0 \\ C = 1 \; A = B = 0 \end{matrix}$$

$q(u_1) = 1$

$q(u_2) = 1 - 2 = -1$ $\quad$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$q(u_3) = 1 - 2 = -1$

$q(u) = l_1(u)^2 - l_2(u)^2 - l_3(u)^2$

(u_1, u_2, u_3) tels que $b(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

$b(u_i, u_j) = l_1(u_i)l_1(u_j) - l_2(u_i)l_2(u_j) - l_3(u_i)l_3(u_j)$

$Si \begin{cases} l_i(u_i) = 1 \\ l_j(u_i) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(u_i, u_i) = l_i(u_i)^2 \\ b(u_i, u_j) = 0 \end{cases}$

2. $q_2\,(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 4yz$

2.1. $q_2\,(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

$q_2\,(x, y, z) = (x + y + z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 4yz$

$q_2\,(x, y, z) = (x + y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz$

rg=2 S=(1,1)

<u>Noyau</u>

Ker q = $\mathbb{K}v$

$\begin{cases} l_1(v) = 0 \\ l_2(v) = 0 \end{cases}$ $\quad v \in Ker\, q \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$ $\quad v_3 = 1$

$\ker q = \mathbb{K}(-2,1,1)$

2.2. **Base de $\mathbb{R}^3$ $(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{v})$ orthogonale pour $\boldsymbol{q_2}$**

$\begin{matrix} l_1(u_1) = 1 \\ l_2(u_1) = 0 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} l_1(u_2) = 0 \\ l_2(u_2) = 1 \end{matrix} / \; l_i(u_j) = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

$\begin{cases} x + y + z = A \\ y - z = \boldsymbol{B} \end{cases}$ ou $\overset{u_1}{\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = \boldsymbol{0} \end{cases}}$ ou $\overset{u_2}{\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = \boldsymbol{1} \end{cases}}$

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = \boldsymbol{0} \end{cases} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = z \end{cases} (1,0,0) = u_1$

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = \boldsymbol{1} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} u_2 = (-1,1,0)$

Dans la base (u_1, u_2, v)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$