5. Applications linéaires et matrices.

Exercice 5.1. Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,a) \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax,ay) \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+a,y+a) \end{array}$ e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y+z) \end{array}$

f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x,0,x-y) \end{array}$ g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 5.2. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définies, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par

$$f(x,y) = (x,0) \quad \text{et} \quad g(x,y) = (0,y).$$

Déterminer $f+g$, $f \circ g$, f^2 et g^2.

Exercice 5.3. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x,y,z,t) = (x+y+z+t, y-t, x-2z+3t)\,.$$

a) Montrer que u est linéaire.
b) Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
c) En déduire que u est surjective.

Exercice 5.4. On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme [1] f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1\,, \quad f(e_2) = -e_1\,, \quad f(e_3) = e_3\,.$$

a) Déterminer l'image par f d'un élément (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
c) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 5.5. Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ par $z \mapsto z + a\bar{z}$.
Suivant les valeurs de a, dire si f est $\mathbb{C}$-linéaire ou $\mathbb{R}$-linéaire.

Exercice 5.6. Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ alors $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E.

b) Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre.

c) Montrer que si f est injective et si $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre alors $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille libre.

Exercice 5.7. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Ker} u.$$

En déduire que

$$\operatorname{rang}(u) + \operatorname{rang}(v) \leqslant n\,.$$

Exercice 5.8. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note φ et ψ les deux applications de E vers E définies respectivement (pour toute f de E) par :

$$\varphi(f) = f' \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Vérifier que φ et ψ sont linéaires.
b) Exprimer $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$.
c) Discuter la surjectivité, l'injectivité et la bijectivité respectives de φ et ψ.

Exercice 5.9. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Quand la réponse est oui, sont-elles surjectives, injectives ? Déterminer leur image et leur noyau.

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+i) \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X^2) \end{array} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Exercice 5.10. On note $\varphi: \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, par $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que φ est linéaire et déterminer son noyau.
2. Montrer de φ envoie le sous-espace $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même. Déterminer le noyau et l'image de la restriction φ_n de φ au sous-espace $\mathbb{C}_n[X]$. Quelle est l'image de φ ?

Exercice 5.11. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= -7e_1 - 6e_2 \\ f(e_2) &= 8e_1 + 7e_2 \\ f(e_3) &= 6e_1 + 6e_2 - e_3. \end{aligned}$$

a) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, puis la matrice de $f \circ f$ dans cette même base.
b) En déduire que f est bijective.

Exercice 5.12. a) En fournissant une matrice équivalente échelonnée, déterminer le rang de chacune des matrices réelles suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

b) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(-1,4,3)$, $(7,2,9)$ et $(0,1,1)$?

c) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} -x & +7y & & = & 0 \\ 4x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & +9y & +z & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

d) Et quelle est celle du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} -x & +4y & +3z & = & 0 \\ 7x & +2y & +9z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

e) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & +4t & +5u & = & 0 \\ 6x & +7y & +8z & +9t & +10u & = & 0 \\ 11x & +12y & +13z & +14t & +15u & = & 0 \\ 16x & +17y & +18z & +19t & +20u & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

f) Et quelle est celle du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x & +6y & +11z & +16t & = & 0 \\ 2x & +7y & +12z & +17t & = & 0 \\ 3x & +8y & +13z & +18t & = & 0 \\ 4x & +9y & +14z & +19t & = & 0 \\ 5x & +10y & +15z & +20t & = & 0 \end{cases} \quad ?$$

Exercice 5.13. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y,z). \end{array}$$

On note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = ((1,2),(-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_3$ et de $\mathcal{B}_3$ vers $\mathcal{B}_2$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B}_4 = ((1,0,-1),(4,0,3),(1,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer les matrices de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_4$ et de $\mathcal{B}_4$ vers $\mathcal{B}_1$.

6. Déterminer la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_4$ et $\mathcal{B}_3$.

Exercice 5.14. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.
En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 5.15. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le rang de A et en déduire que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$.
b) Déterminer un vecteur non nul f_1 appartenant à $\operatorname{Ker} u$.
c) Trouver un vecteur f_2 non nul tel que $u(f_2) = -2f_2$. puis un vecteur f_3 non nul tel que $u(f_3) = 4f_3$.
d) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
e) Calculer la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$.
f) Calculer A'^{100}, puis $u^{100}(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 5.16. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Choisissons deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(A) = n+1$ et considérons l'application u de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui envoie un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sur le reste de la division euclidienne de PB par A. Le polynôme $u(P)$ est donc l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $PB - u(P)$ soit divisible par A.

0. Démontrer que u est une application linéaire.

Première partie : on s'intéresse tout d'abord au cas particulier où $n = 2$, $A = X^3 + aX^2 + bX + C$ et $B = -X + \lambda$.

1. Vérifier que la matrice de u dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & c \\ -1 & \lambda & b \\ 0 & -1 & a+\lambda \end{pmatrix}.$$

2. En supposant $A = X^3 - X^2 - 3X + 2$ et $B = -X + 2$, déterminer des bases de l'image et du noyau de u.
3. Si $A = X^3 - X + 1$ et $B = -X + 1$, montrer que l'application u est bijective et écrire la base canonique de u^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Seconde partie : on traite maintenant le cas général.

1. Montrer que l'application u est injective si A et B sont premiers entre eux. (*Indication* : vérifier que A divise P si $P \in \operatorname{Ker}(u)$.)
2. Soit D un diviseur commun de A et B. Montrer que D divise $u(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. Prouver que u est bijective si et seulement si les polynômes A et B sont premiers entre eux.