4. Espaces vectoriels

Exercice 4.1. 1. Montrer que l'ensemble F des vecteurs de la forme $u_{a,b} = (a+b, -b+2a)$ où $a, b \in K$ est un sous-espace vectoriel de K^2. Donner une famille finie de vecteurs qui engendrent F.

2. Montrer que l'ensemble E des matrices de la forme $M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} b+c-a & a-b & a-c \\ c-a & a & c-a \\ b-a & a-b & c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in K$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(K)$. Donner une famille de vecteurs de $M_3(K)$ qui engendrent E.

Exercice 4.2. Soit n un entier superieur ou égal à 2.

1. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(K)$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$?
2. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $M_n(K)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$.
3. Pour $n = 3$ donner un ensemble fini de matrices de $M_3(K)$ qui engendrent ce sous-espace vectoriel.
4. Donner un supplémentaire dans $M_3(K)$ de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 4.3. Pourquoi les polynômes 1, X, $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel de $\mathbb{C}_3[X]$ des polynômes de degré au plus 3 ? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 4.4. Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ et en donner une base.

Exercice 4.5. On munit $\mathbb{R}^2$ de l'addition habituelle :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et de la loi externe sur le corps $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \to & \lambda \cdot (x_1, x_2) := (\lambda x_1, 0)\,. \end{array}$$

A-t-on muni ainsi $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4.6. Soit $E = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. On définit sur E une loi de composition interne, notée $\oplus$, par

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \to & x \oplus y := xy\,. \end{array}$$

On définit sur E une loi de composition externe, à domaine d'opérateurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \to & \lambda * x := x^\lambda\,. \end{array}$$

Montrer que $(E, \oplus, *)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 4.7. Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

a) $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -1)$.

b) $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$, $w = (0, -1, 1)$.

c) $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$, $w = (1, 0, 1)$, $z = (-1, 1, 1)$.

d) $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, -2, -1)$.

e) $u = (10, -5, 15)$, $v = (-4, 2, -6)$.

Les familles de $\mathbb{R}^3$ données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque la réponse est négative, on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 4.8. Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

a) $u = (2, -3)$, $v = (-1, 1)$;

b) $u = (-6, 2)$, $v = (9, -3)$.

c) $u = (m + 1, -1)$, $v = (-3, m - 1)$, $m \in \mathbb{R}$

Exercice 4.9. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = z = 0\} \\ F_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y = 0\} \\ F_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + z = y\} \\ F_4 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = y\} . \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Déterminer $F_2 + F_3$.

c) Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?

d) Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

e) Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.

f) Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions d) et e) ?

g) Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

Exercice 4.10. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x + y + z + t = 0\} \\ F_2 &:= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x + y = z + t\} . \end{aligned}$$

a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base et la dimension de chacun d'eux.

b) Quelle est la dimension de $F_1 + F_2$?

Exercice 4.11. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2, -3, 1)$ et $u_2 = (2, -2, 1)$.

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Démontrer que le vecteur $u = (0, 1, 0)$ est élément de F, mais que $v = (0, 0, 1)$ ne l'est pas.

c) Calculer les composantes du vecteur $w = (0, 4, 0) \in F$ dans la base (u_1, u_2).
d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $v = (x, y, z)$ soit élément de F.
f) Indiquer la nature géométrique de F.

Exercice 4.12. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y = 0 \text{ et } z = 2t\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base à une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4.13. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $e = (1, -1, 1)$ et $f = (1, 1, 0)$. Soit E le sous-espace vectoriel engendré par e et f.
a) Montrer que la dimension de E est 2.
b) Soit $g = (2, 0, 1)$. Montrer que g est dans E et que f et g forment une base de E. Exprimer e dans cette base.
c) Montrer que $\{e, f, k\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si $k = (1, 0, 0)$.

Exercice 4.14. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère

$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a = b = c = d\}\,.$$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et calculer sa dimension.
b) Pour quelles valeurs du paramètre λ, l'ensemble

$$E_\lambda = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,:\, a + b + c + d = \lambda\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus E_0$.

Exercice 4.15. Soit $a \in \mathbb{R}$ et E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $(1, 1, a)$, $(1, a, 1)$ et $(a, 1, 1)$. Suivant a déterminer la dimension de E_a.

Exercice 4.16. Prouver que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. De quelle dimension ?
Par la suite on considère $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.
1) Montrer que $(1, \sqrt{2})$ est une famille libre.
2) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre.
3) Calculer le rang de $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.
Est-ce que $\mathbb{Q}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 4.17. a) Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$? Donner une base.
b) Montrer que les vecteur suivants de $\mathbb{C}^3$

$$v_1 = (1 + i, 1 + 2i, i)\ v_2 = (2, 4 - i, -1)\ v_3 = (0, -1 + 2i, 2 + i)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et sont libres si $\mathbb{C}^3$ est consideré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.18 (**Application d'un ensemble A vers un espace vectoriel E).**
Montrer (avec tous les détails) que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A est un ensemble quelconque, l'ensemble E^A des applications de A vers E muni de l'addition définie, pour $f, g \in E^A$ et $x \in A$ par :

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$

et la multiplication scalaire définie, pour $f \in E^A$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in A$ par :

$$(\lambda\ f)(x) := \lambda\ f(x),$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exercice 4.19. Soit $\mathbb{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel des applications de $[a,b]$ à $\mathbb{R}$. Lequel de ces sous-ensemble est-il un sous-espace vectoriel ?

a) $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) = \{\text{fonctions continues } f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\}$;
b) ensemble des applications surjectives (resp. injectives) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$;
c) ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $2f(a) = f(b)$;
d) ensemble des applications $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = f(b) + 1$.

Exercice 4.20. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels. Montrer que P et ses n dérivées forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 4.21. Soit $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles suivantes sont libres :

a) $\{x,\ e^x\}$; b) $\{e^x,\ e^{2x}\}$
c) $\{x,\ \sin x\}$; d) $\{\cos x,\ \sin x\}$

Exercice 4.22. Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathcal{E} \subset E$ l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2\ u_n \quad (n \geq 0).$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
b) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathcal{E}$.
c) Tenant compte du fait que les suites de $\mathcal{E}$ sont univoquement déterminées si on connaît u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathcal{E}$.
d) Déterminer les suites de $\mathcal{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.