2. Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 2.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x^2 + 7x - 4 \geq 0$;
2. $x^2 - 15x + 50 < 0$;
3. $3x^2 + 20x + 50 > 0$;
4. $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{4}{x-2} \leq 0$

Exercice 2.2 Trouver trois entiers consécutifs dont la somme des carrés est 509.

Exercice 2.3 Le nombre d'or est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$; on le note φ.

1. Déterminer la valeur exacte de φ.
2. Montrer que $\varphi^5 = 5\varphi + 3$ et que $\dfrac{1}{\varphi^2} = 2 - \varphi$.

Exercice 2.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ xy = 56 \end{cases}$$

Exercice 2.5 Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{Q}[X]$ de

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
3. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$

Exercice 2.6

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$.
2. Déterminer les entiers positifs n tel que $X^2 + 1$ divise $X^n + 1$.

Exercice 2.7 Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

1. On suppose que 1 est racine de P. Montrer que $(X-1)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X-1)^2$.
2. On suppose que -1 est racine de P. Montrer que $(X+1)^2$ divise P et calculer le quotient de P par $(X+1)^2$.

Exercice 2.8 Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme unitaire de degré 3 dans $\mathbb{C}[X]$. Exprimer les coefficients a, b et c en fonction des racines α, β et γ de P.

Exercice 2.9 Soit j la racine cubique de l'unité de partie imaginaire strictement positive.

1. Trouver un polynôme $A \in \mathbb{C}[X]$ unitaire tel que $A(j + i) = 0$.
2. Trouver un polynôme $B \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tel que $B(j + i) = 0$.
3. Trouver un polynôme $C \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire tel que $C(j + i) = 0$. Quelles sont les racines de C ?

Exercice 2.10

1. Montrer que les seuls diviseurs communs de X^4+1 et X^3+1 dans $\mathbb{Q}[X]$ sont les constantes, c'est-à-dire $\mathrm{PGCD}(X^4+1, X^3+1) = 1$.
2. Trouver des polynômes U et V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $(X^4+1)U + (X^3+1)V = 2$.
3. En déduire l'existence d'un polynôme P_0 dans $\mathbb{Q}[X]$ tel que X^4+1 divise P_0 et X^3+1 divise $P_0 - 2$.
4. Soit $Q \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que si Q est multiple de X^4+1 et de X^3+1 alors Q est multiple de $(X^4+1)(X^3+1)$.
5. Trouver tous les polynômes P tels que X^4+1 divise P et X^3+1 divise $P-2$.

Exercice 2.11 Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{2X^3+1}{(X+1)(X^2-3X+2)}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.12

1. Factoriser le polynôme X^4+X^2+1 en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{2X}{X^4+X^2+1}$.

Exercice 2.13

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^2-1}{(X^2+1)^2}$.
2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^2-1}{(X^2+1)^2}$.

Exercice 2.14 Existe-il une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que $F^2 = (X^2+1)^3$? (Indication : penser à la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.)