Contrôle continu - Lundi 30 avril 2012

durée : 45mn

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (9 points). Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (3 points) Soit $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AD = DA\}$, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (3 points) Calculer AD et DA pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

   En déduire des conditions sur a, b, c, d, e, f, g, h et i pour que A appartienne à F.
3. (3 points) Donner une base de F.

Exercice 2 (11 points). On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. (2 points) Les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_3)$ sont-ils supplémentaires ?
2. (2 points) Montrer que les familles (v_1, v_3, v_4) et (v_2, v_5) sont libres.
3. (3 points) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille (v_1, v_3, v_4) (c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_3, v_4)$) et $E = \mathrm{Vect}(v_2, v_5)$.

   Montrer que $\mathbb{R}^4 = E + F$. Les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires ?
4. (2 points) En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $E \cap F$. Donner une base.
5. (2 points) Montrer que le sous-espace vectoriel $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4,\ z = 0\}$ est égal à F.

Questions bonus. (3 points)

– Montrer que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

– Donner la dimension et une base de $\mathbb{R}_{2012}[X]$.