Contrôle continu - Jeudi 29 mars 2012

durée : 1h30mn

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

1. Effectuer la division euclidienne dans $\mathbb{Q}[X]$ de $X^5 + 2X^4 + X^2 - 1$ par $X^4 - 1$.
2. Factoriser le polynôme $X^4 - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{X^5 + 2X^4 + X^2 - 1}{X^4 - 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$.
4. Décomposer cette même fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2 Dans cette exercice, on considère des polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Vérifier que $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + 1)$.
2. A l'aide de la question précédente, déterminer un polynôme P tel que
$$X^n - nX + n - 1 = (X-1)P.$$
3. En déduire que $X^n - nX + n - 1$ est divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 3 Pour chaque nombre réel x, soit la matrice $A(x)$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$A(x) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2x & 1 & x^2 - 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $A(x)A(y) = A(x+y)$.
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la matrice $A(x)$ est inversible.

Exercice 4

1. Pour tout entier m, on note $A(m)$ la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ définie par
$$A(m) := \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$
Soit $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que $A(m)$ est inversible si et seulement si $m \neq 1$ et $m \neq -2$. (On pourra utiliser des opérations élémentaires sur les lignes.)
2. Pour tout entier m, on considère le système (S_m) à 3 inconnues réelles x, y, z suivant :
$$\begin{cases} mx + y + z = 3m + 1 \\ x + my + z = 2m + 5 \\ x + y + mz = m + 6 \end{cases}$$
   (a) Soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \neq 1$ et $m \neq -2$. Déduire de (1.) que le système (S_m) a une unique solution. Calculer cette solution en fonction de m.
   (b) Montrer que le système (S_1) n'a pas de solution.
   (c) Montrer que le système (S_{-2}) a une infinité de solutions. Les déterminer.