Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE 3 : Applications linéaires

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires (avec $a, b \in \mathbb{R}$):

$$a)\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (y,x)\end{array} \qquad b)\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (a,b)\end{array} \qquad c)\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & (x+a, y+b)\end{array}$$

$$d)\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,y^2,z^3)\end{array} \qquad e)\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (x, y-x, -y)\end{array} \qquad f)\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos x\end{array}$$

Exercice 2. Soit $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ deux applications linéaires définies par

$$a)\ f(x,y) := (x,0), \quad g(x,y) := (0,y), \qquad b)\ f(x,y) := (y,0), \quad g(x,y) := (0,x).$$

Pour chaque cas, déterminer $f+g$, $f \circ g$, $g \circ f$, f^2 et g^2.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite l_α définie par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y = 0\}.$$

Ici, on montre que u est une application linéaire en deux manières différentes.

1. Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Notons $x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$ l'image de $x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ par u.
   Expliciter (x', y') en fonction de (x, y).
   (b) Conclure.
2. Posons $\mathbf{u}_1 := (\cos\alpha, \sin\alpha)$ et $\mathbf{u}_2 := (-\sin\alpha, \cos\alpha)$.
   (a) Calculer $u(x\mathbf{u}_1 + y\mathbf{u}_2)$.
   (b) Conclure.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\mathbf{e}_1) = 13\mathbf{e}_1 + 12\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3, \qquad f(\mathbf{e}_2) = -8\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3, \qquad f(\mathbf{e}_3) = -12\mathbf{e}_1 - 12\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $F_1 := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ et $F_2 := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -u\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de chacun d'eux.
2. Monter que F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2, \qquad f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, \qquad f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1,$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est bijectif.
2. Montrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et que $u(G) = G$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^2 = u$. (On dit que u est un *projecteur*.)

1. Montrer que $\mathrm{id}_E - u$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{Im}\, u$
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont suplémentaires.
4. Donner un exemple de projecteur.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que si $u \neq \mathrm{id}_E$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, alors il existe une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ de E telle que $u(x) = x$ pour $x \in \mathcal{B}_1$ et $u(x) = -x$ pour $x \in \mathcal{B}_{-1}$.
3. Donner un tel exemple de u.

Exercice 8. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaires de E dans F. Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un système de vecteurs de E.

1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un système générateur de E, alors $f(\mathcal{F})$ est un système générateur de $\mathrm{Im} f$.
2. Montrer que si $f(\mathcal{F})$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est aussi libre.
3. Montrer que si f est injective et $\mathcal{F}$ est libre, alors $f(\mathcal{F})$ est aussi libre.

Exercice 9. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. Montrer que u est surjective.

Exercice 10. Soit n un entier strictement positif. On considère u un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ définit par

$$u : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}); \qquad A \longmapsto \quad A - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)\mathbf{1}_n,$$

où $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ est la **trace** de la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le noyau Ker u. En déduire la dimension de Im u.
2. Montrer que Im $u = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$.
3. Montrer que u est un projecteur.

Exercice 11. Soit E, E' deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit que E et E' sont **isomorphes**, noté $E \cong E'$, s'il existe une application linéaire bijective, appelé un **isomorphisme**, de E vers E'.

1. Montrer que "être isomorphe" est une relation d'équivalence, c.-à-d.,
   (a) $E \cong E$,
   (b) $E \cong E' \quad \Longrightarrow \quad E' \cong E$,
   (c) $E \cong E'$ et $E' \cong E'' \quad \Longrightarrow \quad E \cong E''$.
2. Montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim E = n$, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exercice 12. Soit $\mathcal{P}$ l'espace des fonctions polynomials, c.-à-d.,

$$\mathcal{P} := \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ t.q.} \\ f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad (x \in \mathbb{R}) \end{array} \right\}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) := x^n$ $(x \in \mathbb{R})$.

1. Montrer que la famille $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{P}$.

Soient u, v deux endormorphismes de $\mathcal{P}$ définis par

$$u(f) := \frac{df}{dx}, \qquad v(f)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

2. Montrer que $u \circ v = \mathrm{id}_{\mathcal{P}}$.
3. $v \circ u$ est-elle surjectif ou injectif ?