Université Claude Bernard
MATH II-Algèbre

FICHE 2 : Espaces vectoriels - (suite)

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F, F_1, F_2 les sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad F := \{(x, y, z) \mid x = y\}.$$

1. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 + F_2$ et ensuite $(F_1 + F_2) \cap F$.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $F_1 \cap F$, $F_2 \cap F$ et ensuite $F_1 \cap F + F_2 \cap F$.

Exercice 2. Soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les sous-espaces sont en somme directe si et seulement si $(F_1 + \cdots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0\}$, pour tout $1 < i \leq k$.

Exercice 3. Soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les sous-espaces sont en somme directe si et seulement si

$$\dim\, (F_1 + \cdots F_k) = \dim\, F_1 + \cdots + \dim\, F_k.$$

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^3$ et F_1, F_2, F_3 sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F_1 := \{(t, -t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_2 := \{(0, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad F_3 := \{(t, 0, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_3 \cap F_1 = \{0\}$.
2. La somme $F_1 + F_2 + F_3$ est-elle directe ? Vérifier votre réponse.

Exercice 5. Dans chaque cas, vérifier si les deux vecteurs forment une famille libre.

$$a)\ u = (2, -3),\ v = (-1, 1), \qquad b)\ u = (m + 1, -1),\ v = (-3, m - 1), m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $u = (1, 1, 1),\ v = (1, 1 - 1)$.
2. $u = (1, 0, -1),\ v = (-1, 1, 0),\ w = (0, -1, 1)$.
3. $u = (1, 1, 0),\ v = (0, 1, 1),\ w = (1, 0, 1),\ z = (-1, 1, 1)$.
4. $u = (1, 1, 1),\ v = (2, -1, 2),\ w = (1, -2, -1)$.

Les familles ci-dessus sont-elles génératices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque la réponse est négative,
on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

Exercice 7. Donner deux bases du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, et en déduire $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Donner les coordonnées de $z = 3 + 2i$ dans chacune de ces bases. Même questions pour $\mathbb{C}$ considéré en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 8. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\},$$
$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0\},$$
$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = t\}.$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.

2. Quelle est la dimension de $F + G$?

3. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

Exercice 9. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E.

3. Compléter $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$ et E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $(1, 1, a)$, $(1, a, 1)$, $(a, 1, 1)$. Suivant la valeur de a, déterminér la dimension de E_a.

Exercice 11. Pourquoi les polynômes 1, X, $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ des polynômes à coefficients complexes de degré au plus 3 ? Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 12. Soit $E := \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle $(*) : y'' + y = 0$.
Soit S l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont solutions de $(*)$.

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On admettra que $\dim S = 2$.

2. Montrer que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ appartiennent à S.

3. Montrer que la famille $\{\cos(x), \sin(x)\}$ est libre.

4. Conclûre.

Exercice 14. Soit E, F, G trois parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définies par

$$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid\ \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } f(x) = ax^2 + bx + c\},$$
$$F := \{f \in E \mid f(0) = 0\}, \qquad G := \{f \in E \mid \deg f \leq 1\}.$$

1. Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Montrer que $E = F + G$ et que cette somme n'est pas directe.

3. Trouver un supplémentaire de F dans E.

Exercice 15. Soit $S := \{(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid u_k \in \mathbb{R}\ u_k = 0\ k >> 0\}$ l'espace vectoriel des suites réelles finies. Pour $i \in \mathbb{N}$, on définit $s^i = (s^i_k)_k \in S$ par $s^i_i = 1$ et $s^i_k = 0$ $(k \neq i)$.

1. Expliciter s^0, s^1, s^2.

2. Montrer que la famille $\{s^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de S.

3. En déduire la dimension de S.