L2 Mathématiques
2009-2010

Introduction aux équations différentielles
DM 1

Exercice 1. (Reprise du td: cf fiche 1 (fin))
(a) On considère l'équation

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)y^{\alpha}(x) \qquad \text{(équation de Bernouilli)}$$

où $\alpha \neq 1$ est un réel.
- On suppose $y(x) > 0$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$.
- En déduire la forme des solutions de l'équation de Bernouilli.

(b) On considère l'équation

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x) \qquad \text{(équation de Ricatti)}$$

- On suppose que $y_p(x)$ est une solution particulière. On cherche une solution de la forme $y(x) = y_p(x) + z(x)$. Montrer que la fonction z satisfait une équation de Bernouilli.
- Résoudre l'équation $(1 - x^3)y'(x) + x^2y(x) + y^2(x) - 2x = 0$ sachant que $y_p(x) = x^2$ est solution.

Exercice 2. (Portraits de phase)
(a) (reprise d'une question du CC1)
Dresser le portrait de phase (i.e. esquisser/tracer les courbes solutions) du système linéaire

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X(t)$$

où $X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$.

(b) Même question pour l'équation

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X(t).$$

Exercice 3. (Equations à différentielle exacte, facteur intégrant)
(Pour des rappels sur ces équations cf la fiche de résumé de tds II)
Soient I, J deux intervalles de $\mathbf{R}$ et deux applications

$$M, N : I \times J \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

de classe C^2 (i.e. M et N admettent des dérivées partielles d'ordre 2 continues).
On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : I \to J$ suivante:

$$M(x, y(x)) + N(x, y(x))\, y'(x) = 0. \quad (E)$$

Pour les 3 premières questions on suppose que $N(x, y) \neq 0$ pour tout $(x, y) \in I \times J$.

(a) Montrer que s'il existe une application $u : I \to \mathbf{R} : x \mapsto u(x)$ ne s'annulant pas sur I telle que

$$u(x)M(x, y(x)) + u(x)N(x, y(x))\, y'(x) = 0 \quad (E')$$

soit à différentielle exacte (i.e. u est un facteur intégrant de (E)), alors l'application $p : I \times J \to \mathbf{R}$ définie par

$$p(x, y) = \frac{\partial_y M(x, y) - \partial_x N(x, y)}{N(x, y)}$$

dépend seulement de la variable $x \in I$.

(b) Montrer que si l'application p du point (a) dépend seulement de la variable $x \in I$ alors l'application $u(x) = e^{P(x)}$ où P est une primitive de p sur I est telle que (E') est à différentielle exacte.

(c) Application: résoudre l'équation $cos(x)cos(y(x)) - 2sin(x)sin(y(x))\, y'(x) = 0$ dans le pavé $]0, \pi[\times]0, \pi[$.

(d) Résoudre l'équation $(x + y(x)) + (x - y(x))\, y'(x) = 0$.
Pouvez-vous décrire les surfaces de niveaux $F(x, y) = C$ dans ce cas?
(Le point (d) est indépendant des précédents.)