

Calcul de volumes en géométrie hyperbolique

Antonin Montjol

encadré par Olga Kravchenko

June 2026

Résumé. Il s'agit d'un texte basé sur la lecture de plusieurs articles dont le but est de poser les bases de la géométrie hyperbolique et de démontrer comment la fonction de Lobachevsky, définie plus tard, permet de calcul des volumes dans cette géométrie.

1 Cadre de travail

1.1 Axiomes de la géométrie euclidienne

Les axiomes de la géométrie classique ont été énoncés par Euclide et sont au nombre de cinq :

1. Il existe toujours une droite qui passe par deux points du plan.
2. Tout segment peut être étendu suivant sa direction en une droite (infinie).
3. À partir d'un segment, il existe un cercle dont le centre est une des extrémités du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première.

Bien que les quatre premiers postulats aient suffi à Euclide pour démontrer la plupart des propriétés, il n'a jamais réussi à se passer du cinquième.

Des tentatives de démonstration du cinquième postulat à partir des quatre premiers ont été faites, sans succès, jusqu'au 18ème siècle. Il est ensuite apparu qu'une telle démonstration n'existera jamais, et qu'on pouvait remplacer le cinquième axiome de plusieurs façon pour obtenir plusieurs géométries cohérentes.

1.2 Axiomes de la géométrie hyperbolique

Pour obtenir la géométrie hyperbolique à partir de la géométrie euclidienne, il faut premièrement introduire le concept de géodésique. Il s'agit d'une généralisation de la droite. Deux géodésiques sont parallèles si elles ne se croisent pas dans l'espace. Tous les axiomes précédents seront donc écrits en termes de géodésiques plutôt que de droites. Deuxièmement, on remplace le cinquième axiome par le postulat suivant :

Étant donné un point et une géodésique ne passant pas par ce point, il existe au moins deux géodésiques passant par ce point et parallèles à la première.

Cela implique d'ailleurs que par tout point extérieur à une géodésique passe une infinité de parallèles.

1.3 Le modèle du demi espace hyperbolique

Nous pouvons choisir parmi différents ensembles munis de métriques différentes et de définitions différentes pour les angles et les droites. Toutes ces options permettent de concrétiser analytiquement les axiomes précédents.

L'un de ces modèles est le demi espace hyperbolique. En dimension n , l'action se déroule dans l'ensemble

$$H^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n / y > 0\}$$

On appellera bord de cet espace l'ensemble $\{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)\} \cup \{\infty\}$.

Pour définir les objets de base de la géométrie dans cet espace, on peut le munir d'un produit scalaire glissant.

Définition 1 (Produit scalaire). *Soit $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point du demi espace en dimension n . Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ des vecteurs. On peut définir le produit scalaire de u avec v au point P comme suit :*

$$\langle u, v \rangle_P = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n}{x_n^2}$$

2 Définition des objets dans le demi espace

2.1 Angle

Définition 2 (Angle). *En s'inspirant du cas euclidien, on peut définir l'angle θ entre deux vecteurs u et v au point P à partir de la relation*

$$\langle u, v \rangle_P = \sqrt{\langle u, u \rangle_P} \times \sqrt{\langle v, v \rangle_P} \times \cos(\theta)$$

On observe que θ ne dépend pas du point P choisi, car il est défini de la même façon qu'un angle en géométrie euclidienne.

On peut alors définir l'orthogonalité entre deux vecteurs comme le fait que leur produit scalaire est nul. Cette notion ne dépend toujours pas du point P choisi.

2.2 Géodésique

Définition 3 (Géodésique). Une courbe continue $\gamma : I \rightarrow H^n$ avec $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ détermine une géodésique $Im(\gamma)$ du demi espace si et seulement si pour tout couple $(a, b) \in I^2$ elle minimise l'expression

$$\int_{[a,b]} \frac{\sqrt{x_1(t)^2 + \dots + x_n(t)^2}}{x_n(t)} dt$$

parmi tous les autres chemins continus d'images identiques en a et b .

L'intégrale précédente permet alors de définir la distance hyperbolique entre les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$.

Remarque. Il est connu que dans H^2 , une géodésique est soit une droite verticale, soit un arc de cercle centré en un point fini du bord de l'espace.

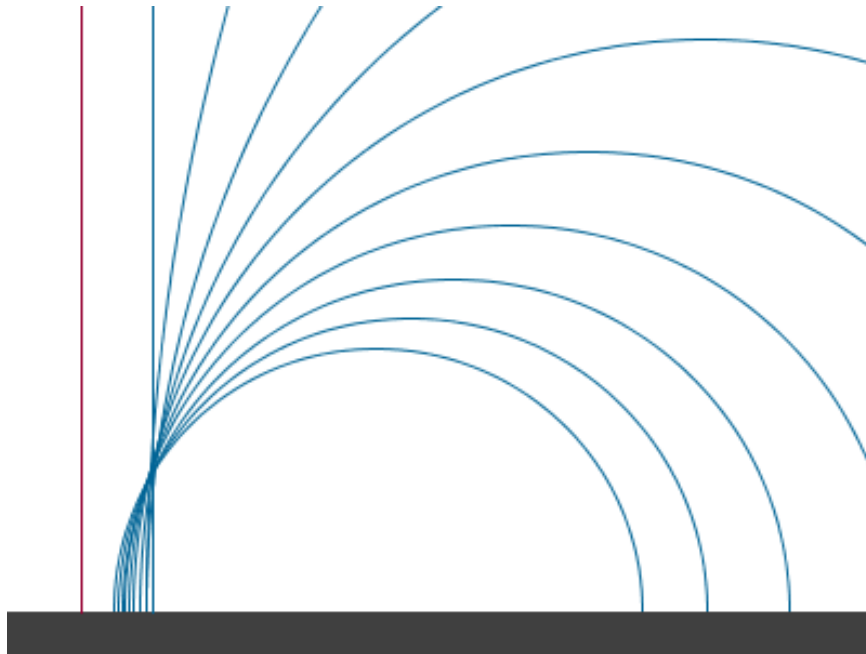


Figure 1: Des géodésiques de H^2 , qui permettent d'illustrer le cinquième postulat.

2.3 Aire

Définition 4 (Aire). Soit D une partie de H^2 . Alors

$$Aire(D) = \int \int_D \frac{dx dy}{y^2}$$

On peut comprendre cette définition en prenant un petit rectangle euclidien basé en (x, y) de côtés dx et dy . Les longueurs hyperboliques de ses côtés sont $\frac{dx}{y}$ et $\frac{dy}{y}$. On peut alors définir son aire hyperbolique comme le produit des longueurs hyperboliques de ses côtés puis intégrer.

Remarque. Il a été démontré que l'aire d'un triangle hyperbolique dont les angles sont α, β, γ est $\pi - \alpha - \beta - \gamma$. On peut donc observer qu'en géométrie hyperbolique, non seulement l'aire se calcule à partir des angles, mais elle est aussi bornée. Voyons ce qu'il en est pour les volumes.

2.4 Volume

Définition 5 (Volume). *Soit D une partie de H^3 . Alors*

$$\text{Volume}(D) = \int \int \int_D \frac{dx dy dz}{y^3}$$

3 Calcul de volumes

3.1 Fonction de Lobachevsky

On appelle fonction de Lobachevsky, notée $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ celle qui se définit de la manière suivante

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log|2\sin(u)| du$$

Remarque. La fonction Λ est impaire et périodique de période π (source [2], 7.3).

3.2 Angles diédraux d'un tétraèdre idéal

On peut naturellement étendre le cadre de travail, H^n en considérant des points placés sur son bord.

Définition 6 (Tétraèdre idéal). *Un tétraèdre est dit idéal si tous ses sommets sont sur le bord de H^n .*

Étant donné un tétraèdre, il est possible de définir l'angle entre deux de ses faces. De tels angles se nomment des angles diédraux, ils sont au nombre de 6.

Lemme 1. *Les 6 angles diédraux d'un tétraèdre idéal ne prennent que 3 valeurs distinctes.*

Proof. **Traitons le cas dans lequel le tétraèdre ne possède aucun sommet à l'infini.** Soit z un sommet du tétraèdre.

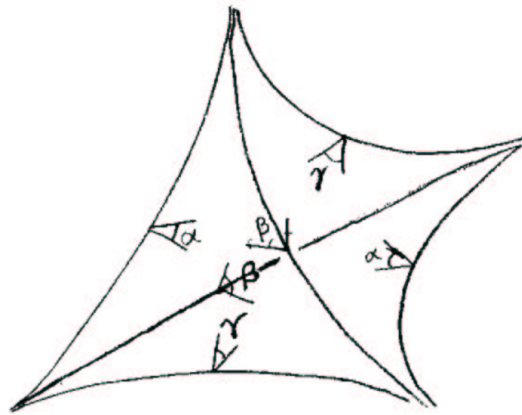


Figure 2: Un tétraèdre idéal dont aucun sommet n'est à l'infini. Les angles inscrits sur la figure sont ceux qu'on obtient après démonstration du résultat.

Soit une sphère euclidienne centrée en z , d'un rayon non nul quelconque. Alors le théorème sur la forme des géodésiques permet d'affirmer que l'intersection entre cette sphère euclidienne et le tétraèdre est un triangle, dont les angles sont égaux aux trois angles diédraux issus du sommet z .

En projetant le triangle en question sur le plan euclidien, on conserve les angles diédraux entre les faces qui se rencontrent à ses sommets, et on peut affirmer que leur somme fait π .

Répéter ce calcul en faisant varier le sommet z permet d'obtenir 4 relations sur les angles diédraux du tétraèdre. Ces dernières permettent de démontrer que certains sont égaux entre eux, et de conclure la preuve.

Dans le cas où un des sommets se trouve à l'infini, il ne reste plus que trois sommets susceptibles de jouer le rôle de z . Une quatrième relation peut être trouvée en considérant le triangle qui forme la base du tétraèdre, plutôt qu'en cherchant à en créer un en introduisant une sphère euclidienne.

□

3.3 Subdivision du tétraèdre, calcul du volume

Théorème 2 (Volume d'un tétraèdre idéal). *Soit un tétraèdre idéal caractérisé par trois angles diédraux α , β , γ . Nommons-le $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ et supposons qu'un de ses sommets se trouve à l'infini. Alors $\text{Volume}(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$.*

Proof. Considérons un tétraèdre nommé $S_{\alpha,\beta,\gamma}$, tel qu'il ne soit pas idéal. Il possède 6 angles diédraux, dont trois sont droits. Les autres sont α, β, γ . On suppose de plus qu'on tel tétraèdre possède un sommet situé à l'infini. Le triangle qui forme la base de ce tétraèdre, s'il est projeté sur un plan euclidien, conserve les angles diédraux entre les autres faces du tétraèdre qui se rejoignent en chacun de ses sommets, dont la somme fait alors π . Cela implique $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$.

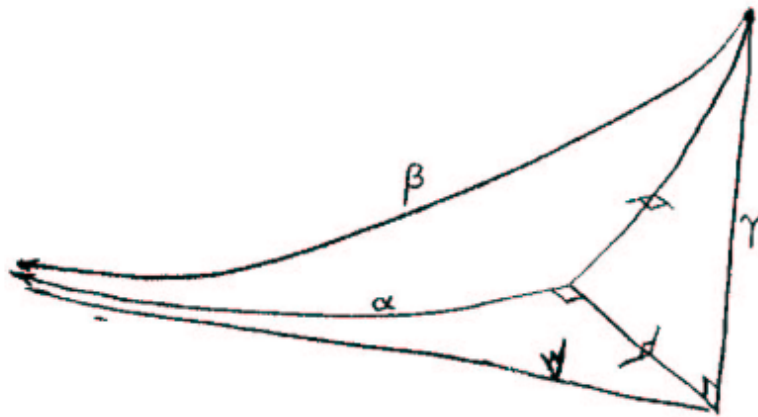


Figure 3: Représentation de $S_{\alpha,\beta,\gamma}$

La méthode consiste à calculer son volume avant de subdiviser $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ en formes de ce type.

La preuve du théorème 2 est interrompue pour énoncer et démontrer le lemme suivant.

Lemme 3 (Volume de $S_{\alpha,\beta,\gamma}$). $\text{Volume}(S_{\alpha,\beta,\gamma}) = \frac{1}{4}(\Lambda(\alpha + \gamma) + \Lambda(\alpha - \gamma) + 2\Lambda(\frac{\pi}{2} - \alpha))$

Proof. Observons les trois sommets qui ne sont pas à l'infini. Ils forment un triangle hyperbolique. Puisqu'ils sont trois et puisque les géodésiques entre ces sommets sont des arcs de cercles, on peut trouver une sphère centrée sur le bord sur laquelle se trouve entièrement le triangle hyperbolique dont il est question. On peut d'ailleurs la centrer en zéro sans perdre de généralité, et supposer qu'elle est unitaire.

Nous pouvons ensuite projeter ce triangle hyperbolique sur le plan (x, y) pour en faire un triangle euclidien T .

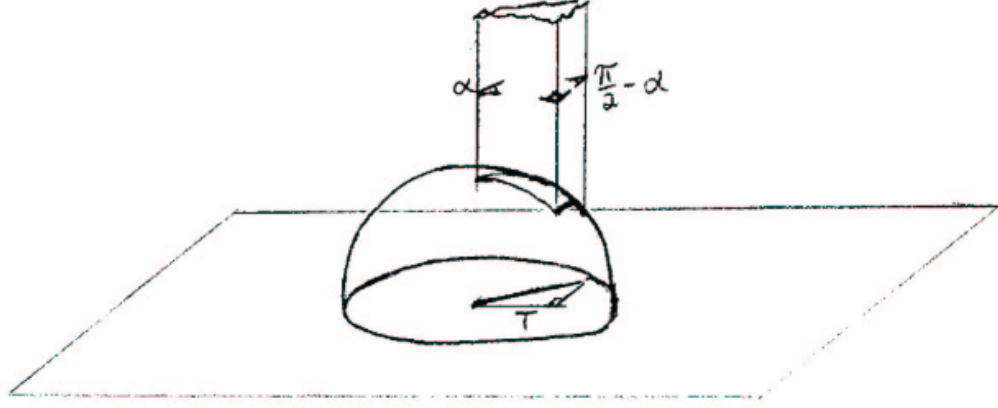


Figure 4: Le tétraèdre $S_{\alpha, \beta, \gamma}$ dont la base a été projetée sur le plan euclidien.

T peut d'ailleurs être exprimé comme la zone du plan vérifiant $0 \leq x \leq \cos(\gamma)$ et $0 \leq y \leq x \tan(\alpha)$

Le volume de $S_{\alpha, \beta, \gamma}$ est alors

$$\int \int_{x, y \in T} \int_{z \geq \sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{dx dy dz}{z^3}$$

c'est-à-dire

$$\int \int_{x, y \in T} \frac{dx dy}{2(1-x^2-y^2)}$$

et en posant $a = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$\int_0^{\cos(\gamma)} dx \int_0^{x \tan(\alpha)} \frac{dy}{2(a^2-y^2)}$$

on peut intégrer selon y et obtenir

$$\int_0^{\cos(\gamma)} \frac{dx}{4a} \log\left(\frac{a \cos(\alpha) + x \sin(\alpha)}{a \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)}\right)$$

il suffit ensuite de poser $x = \cos(\theta)$ pour faire apparaître l'intégrale trigonométrique

$$-\frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} \log\left(\frac{2 \sin(\theta+\alpha)}{2 \sin(\theta-\alpha)}\right) d\theta$$

développer le logarithme permet d'exprimer l'intégrale précédente à l'aide de la fonction de Lobachevsky

$$\frac{1}{4} (\Lambda(\gamma + \alpha) - \Lambda(\gamma - \alpha) - \Lambda(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \Lambda(\frac{\pi}{2} - \alpha))$$

La π -périodicité et l'imparité de Λ permet d'arriver au résultat attendu.

□

Remarque. Si un second sommet de $S_{\alpha,\beta,\gamma}$ se situe sur le bord de l'espace (donc pas à l'infini car il y en a déjà un), alors on peut utiliser la même méthode que dans la preuve du Lemme 1 (centrer une sphère euclidienne sur le sommet en question...) pour obtenir une relation sur trois angles de $S_{\alpha,\beta,\gamma}$, qui permettra d'écrire $\alpha = \gamma$, car on savait déjà que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Il est expliqué dans la section 7.9 de l'article [2] (voir sources) que dans ce cas, $\text{Volume}(S_{\alpha,\beta,\gamma}) = \frac{1}{2}\Lambda(\alpha)$.

Revenons à la preuve du théorème 2.

Il est maintenant temps de découper $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ pour démontrer le résultat plus général.

Projetons le triangle qui forme la base du tétraèdre sur le plan euclidien, comme on l'a fait plus haut. Il se trouve une sphère, supposée centrée en zéro, de rayon R telle que les 3 sommets de $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ non situés à l'infini soient sur son bord, et sa base sur sa surface.

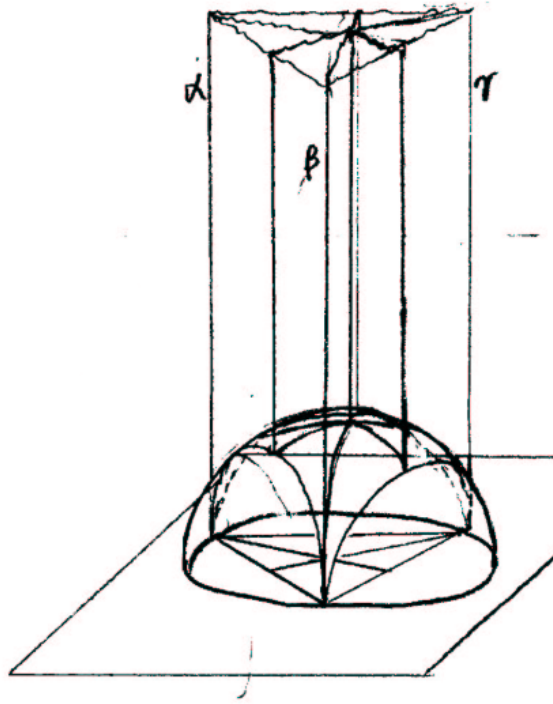


Figure 5: Le tétraèdre $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ dont la base a été projetée sur le plan euclidien.

Nous allons subdiviser la base de $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$ en plusieurs triangles hyperboliques, puis les utiliser comme bases pour les tétraèdres dont l'union sera $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$. Pour cela on travaille sur la projection euclidienne de la base, T .

Supposons dans un premier temps que l'origine soit à l'intérieur du triangle T .

Nous traçons les segments perpendiculaires à chaque côté passant par l'origine. Nous relierons ensuite l'origine à chaque sommet de T .

Les angles inscrits sur la figure suivante sont obtenus en remarquant que les triangles qui partagent une perpendiculaire à un côté de T sont semblables.

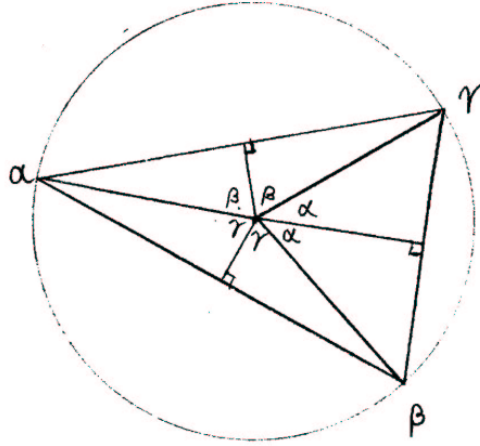


Figure 6: L'allure de T après la subdivision (centre du cercle dans T).

On observe que chacun des tétraèdres ainsi formés est bien de la forme de ceux dont il est question dans le lemme 2. Mais on remarque encore que chacun de ces tétraèdres possède un sommet non infini sur le bord de l'espace. On pourra ainsi utiliser la remarque placée à la fin de la preuve du lemme 2.

Cela donne immédiatement

$$Volume(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

Supposons dans un second temps que l'origine soit à l'extérieur du triangle T .

Il suffira de découper de la même façon, en comptant le volume de certains tétraèdres négativement.

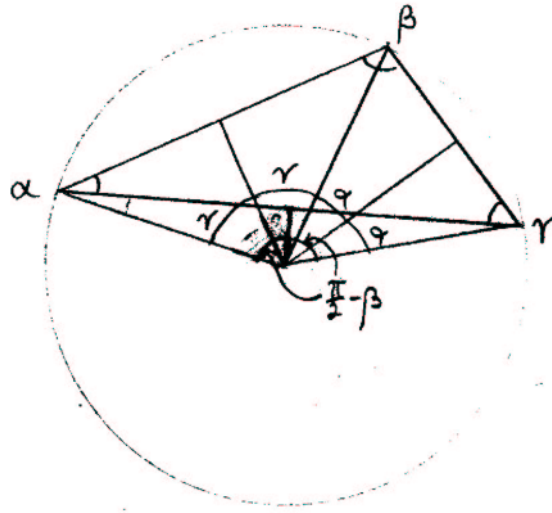


Figure 7: L'allure de T après la subdivision (centre du cercle hors de T).

□

3.4 Conséquences du théorème précédent

Nous avons démontré une formule pour calculer le volume d'un type particulier de tétraèdres hyperboliques. Il s'agit d'un outil qui pourrait servir à calculer des volumes de tétraèdres moins particuliers, ou d'ensembles complexes se décomposant en tétraèdres.

SOURCES

- [1] **Hyperbolic Geometry** - JAMES W. CANNON, WILLIAM J. FLOYD, RICHARD KENYON, AND WALTER R. PARRY pour les cinq modèles, les géodésiques et les angles et les distances (section 1 et 2)
- [2] **The Geometry and Topology of Three-Manifolds** - WILLIAM P. THURSTON, J.W. MILNOR pour le volume du tétraèdre
- [3] **Mostly Surfaces** - RICHARD EVAN SCHWARTZ