

INTRODUCTION À LA CORRESPONDANCE ROBINSON-SCHENSTED-KNUTH ET REPRESENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DE S_n

JIN MAN

Licence 3

Université Claude Bernard Lyon 1

Mathématiques

Programme : Projet L3 en maths

Sous la direction de : Thomas Gerber

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
1.1. Notions	2
1.2. Insertion par ligne	2
1.3. La correspondance RSK	4
1.4. Matrices boules	8
2. Des applications	13
3. Insertion par colonne	18
4. Représentation de S_n	23
4.1. Actions de S_n sur les tableaux	23
4.2. Modules de Specht	25
5. Conclusion et remerciements	35
6. Appendice	36
6.1. Introduction à la théorie des représentations	36
Références	53

RÉSUMÉ. Le but de ce projet est comprendre la correspondance RSK, retrouver des identités classiques incluant la formule de Cauchy, et les utiliser pour étudier les représentations irréductibles de S_n .

Mots-clés : la correspondance RSK, formule de Cauchy et littlewood, Specht modules, représentations irréductibles de S_n .

1. INTRODUCTION

La correspondance de Robinson–Schensted–Knuth, ou correspondance RSK, associe à un mot, ou plus généralement à une matrice à coefficients entiers positifs, une paire de tableaux (semi-standards) de même forme, qui fournit un lien naturel entre matrices, tableaux de Young, fonctions symétriques et représentations du groupe symétrique.

Dans cet article on va suivre le livre [1] de William Fulton pour comprendre cette correspondance.

1.1. Notions.

Définition 1.1 (Diagramme de Young). Un *diagramme de Young* est une collection de cases, disposées en lignes alignées à gauche, de sorte que le nombre de cases dans chaque ligne soit décroissant.

Si les longueurs des lignes sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, alors le nombre total de cases est

$$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m.$$

Ainsi, un diagramme de Young détermine une partition de l'entier $|\lambda|$. Réciproquement, toute partition d'un entier détermine un diagramme de Young.

Définition 1.2 (Partition). Une *partition* d'un entier positif n est une suite finie d'entiers positifs

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$$

telle que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = n.$$

On note

$$\lambda \vdash n$$

pour dire que λ est une partition de n , et l'on note $|\lambda|$ l'entier partitionné par λ .

Définition 1.3 (numérotation). Soit λ un diagramme de Young. Toute manière de placer un entier positif dans chaque case de λ s'appelle une numération du diagramme.

Définition 1.4 (Young tableau). Un *Young tableau*, ou simplement un *tableau*, est un remplissage d'un diagramme de Young satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (1) les entrées sont (faiblement) croissantes le long de chaque ligne ;
- (2) les entrées sont strictement croissantes le long de chaque colonne.

On dit alors que le tableau est *de forme* λ .

Comme cas particulier, un *standard tableau* est un tableau dont les entrées sont exactement les entiers $1, 2, \dots, n$, chacun apparaissant une seule fois.

1.2. Insertion par ligne. Le premier algorithme, appelé *insertion par ligne* (*row-insertion*) ou *row bumping*, prend un tableau T et un entier positif x , et construit un nouveau tableau, noté

$$T \leftarrow x.$$

Ce nouveau tableau possède une case de plus que T , et ses entrées sont celles de T , avec une nouvelle entrée égale à x , après une réorganisation des autres entrées.

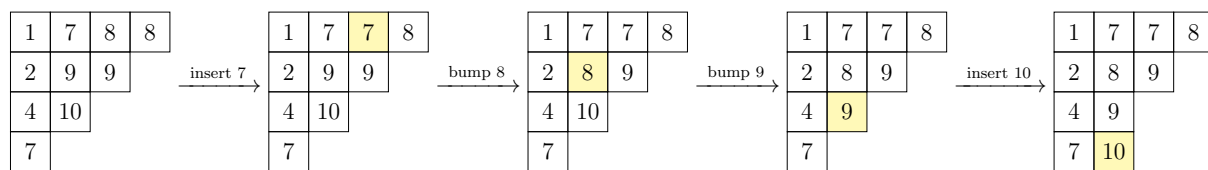
La procédure est la suivante. Si x est supérieur ou égal à toutes les entrées de la première ligne de T , on ajoute x dans une nouvelle case à la fin de cette ligne. Sinon, on cherche l'entrée la plus à gauche dans la première ligne qui soit strictement supérieure à x . On remplace alors cette entrée par x , et l'entrée ainsi remplacée est *chassée*.

On poursuit ainsi ligne après ligne jusqu'à ce que l'entrée chassée puisse être placée à la fin de la ligne considérée. Si une entrée est chassée de la dernière ligne, alors elle forme à elle seule une nouvelle ligne au bas du tableau.

D'abord, il faut vérifier que le résultat reste un tableau, i.e. ,

- (1) les entrées sont (faiblement) croissantes le long de chaque ligne ;
- (2) les entrées sont strictement croissantes le long de chaque colonne.

On remplace par x l'entrée la plus à gauche dans la première ligne qui soit strictement supérieure à x , donc (1) est vraie. De plus, lorsqu'une entrée y remplace une entrée z , l'entrée située en dessous, si elle existe, est strictement plus grande que z , par définition d'un tableau. Ainsi, z reste soit dans la même colonne, soit se déplace vers la colonne à gauche. Par conséquent, l'entrée située au-dessus de sa nouvelle position est inférieure ou égale à y , donc strictement inférieure à z .

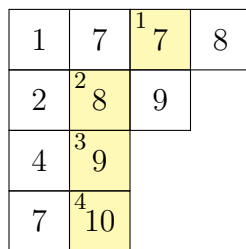


Définition 1.5 (Route de bumping). Soit T un tableau, et considérons l'insertion par ligne d'une entrée x dans T , que l'on note

$$T \leftarrow x.$$

Cette insertion détermine une suite R de cases, formée des cases à partir desquelles une entrée est éjectée au cours de l'algorithme, ainsi que de la case dans laquelle la dernière entrée éjectée vient finalement se placer.

Cette collection R est appelée la *route de bumping* de l'insertion par ligne.



Définition 1.6 (Ordre relatif des routes de bumping). Une route de bumping contient au plus une case dans chacune des lignes, en partant de la ligne supérieure.

Soient R et R' deux routes de bumping. On dit que R est *strictement à gauche* de R' si, dans chaque ligne contenant une case de R' , la route R possède une case située strictement à gauche de la case correspondante de R' .

On dit que R est *faiblement à gauche* de R' si, dans chaque ligne contenant une case de R' , la route R possède une case située à gauche ou dans la même colonne que la case correspondante de R' .

On emploie de manière analogue les termes stricts et faibles pour comparer les positions situées au-dessus ou au-dessous d'une case ou d'une ligne donnée.

Lemme 1.7 (Lemme de bumping par ligne). *Considérons deux insertions par ligne successives : on insère d'abord x dans un tableau T , puis on insère x' dans le tableau obtenu $T \leftarrow x$. Ces deux insertions donnent lieu à deux routes de bumping R et R' , ainsi qu'à deux nouvelles cases B et B' .*

- (1) Si $x \leq x'$, alors R est strictement à gauche de R' , et B est strictement à gauche de B' et faiblement en dessous de B' .
- (2) Si $x > x'$, alors R' est faiblement à gauche de R , et B' est faiblement à gauche de B et strictement en dessous de B .

Démonstration. Supposons d'abord que $x \leq x'$. Si x chasse une entrée y dans la première ligne, alors d'après l'algorithme, l'entrée y' qui est chassée par x' doit se trouver strictement à droite de la case où x a effectué son bumping. En effet, les entrées situées dans cette case ou à sa gauche sont toutes inférieures ou égales à x . Comme $x \leq x'$, elles sont donc aussi inférieures ou égales à x' , et x' ne peut pas les chasser.

Ainsi, le bumping effectué par x' a lieu strictement à droite de celui effectué par x . On peut répéter ce raisonnement par récurrence en ligne et obtenir deux routes avec R strictement à gauche de R' .

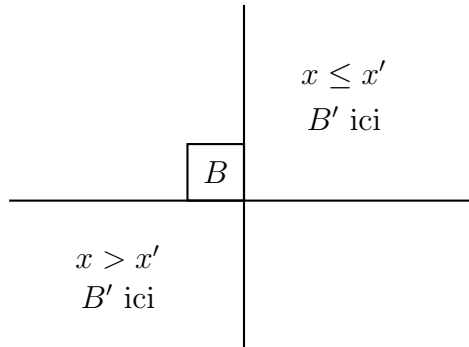
Il reste à comparer les nouvelles cases B et B' . La route R ne peut pas s'arrêter strictement au-dessus de la route R' car si pour R' une entrée est chassée, c'est-à-dire qu'elle n'est pas maximale, alors pour R , qui est à gauche, une entrée doit être chassée. Si R' s'arrête d'abord, alors la route R ne se déplace jamais vers la droite. Comme nous avons montré que le tableau reste un tableau après chaque étape d'insertion, donc la nouvelle case B est strictement à gauche de B' (impossible d'être dans la même colonne), et faiblement en dessous de B' .

Supposons réciproquement que $x > x'$. Si x et x' chassent respectivement des entrées y et y' dans la première ligne, alors la case où le bumping a lieu pour x' est située soit dans la même colonne que celle où le bumping a lieu pour x , soit à sa gauche.

Dans les deux cas, on obtient $y > y'$. Soit x chasse y , alors $y > x$. (i) Si x' chasse x , i.e. $x = y'$, alors $y > y'$. (ii) Si x' chasse $y' \leq x$, alors on a aussi $y > y'$. Le même argument se répète ensuite sur les lignes successives. Il en résulte que la route R' est faiblement à gauche de la route R .

Enfin, dans ce second cas, la route R' doit continuer au moins une ligne en dessous de la route R . Ainsi, la nouvelle case B' est faiblement à gauche de B , et strictement en dessous de B . $\square$

La figure suivante montre les positions de B et B' .



1.3. La correspondance RSK. Soit

$$w = x_1 x_2 \cdots x_r$$

un mot sur l'alphabet $[n] = \{1, \dots, n\}$. On associe à w un tableau $P(w)$, appelé *tableau d'insertion*, en insérant successivement les lettres de w par insertion par ligne :

$$P(w) = (((\cdots ((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \leftarrow \cdots) \leftarrow x_{r-1}) \leftarrow x_r).$$

Autrement dit, si P_k désigne le tableau obtenu après l'insertion des k premières lettres, alors

$$P_k = (((\cdots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \leftarrow \cdots) \leftarrow x_{k-1}) \leftarrow x_k).$$

Cependant, le tableau $P(w)$ ne contient pas toute l'information nécessaire pour retrouver le mot w . En effet, il sauvegarde les valeurs insérées, mais il ne sauvegarde pas l'ordre dans lequel ces valeurs ont été insérées. Or cet ordre est essentiel : deux mots différents peuvent contenir les mêmes lettres, mais dans des ordres différents.

Donc on construit simultanément un second tableau, noté $Q(w)$, appelé *tableau d'enregistrement*. À la k -ième étape, l'insertion de x_k dans P_{k-1} ajoute une nouvelle case au diagramme de Young. On place alors l'entier k dans la case correspondante de Q . Ainsi, $P(w)$ enregistre les lettres insérées, tandis que $Q(w)$ enregistre l'ordre des nouvelles cases.

On obtient donc une suite de paires de tableaux

$$(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), \dots, (P_r, Q_r),$$

où P_k et Q_k ont toujours la même forme. Le tableau final est

$$(P(w), Q(w)) = (P_r, Q_r).$$

Le tableau $Q(w)$ est un tableau standard : ses entrées sont les entiers $1, \dots, r$, et la manière dont les cases sont ajoutées garantit que les lignes et les colonnes sont strictement croissantes. Car la case ajoutée à la k -ième étape est nécessairement un coin extérieur du diagramme, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de voisine à droite ni en dessous. On y inscrit l'entier k , qui est plus grand que toutes les entrées déjà présentes dans Q_{k-1} . Il est donc plus grand que l'entrée située à sa gauche, s'il y en a une, et que l'entrée située au-dessus, s'il y en a une. Ainsi les lignes et les colonnes de Q_k restent strictement croissantes.

La correspondance précédente peut être généralisée en remplaçant le tableau d'enregistrement standard par un tableau semi-standard. Plus précisément, on part maintenant d'une paire de tableaux (P, Q) de même forme, où les entrées de P appartiennent à $[n]$, tandis que les entrées de Q appartiennent à $[m]$. Le tableau Q n'est plus supposé standard : ses entrées peuvent donc se répéter.

L'idée est alors de retrouver, à partir de la paire (P, Q) , un objet qui remplace le mot dans le cas standard. Pour cela, on applique successivement l'insertion par ligne inverse. À chaque étape, on choisit dans Q une case contenant une entrée maximale. S'il y a plusieurs telles cases, on choisit celle qui est la plus à droite. On supprime cette case de Q , et l'on applique l'insertion inverse au tableau P en partant de la case correspondante.

Si u_k désigne l'entrée supprimée de Q , et si v_k désigne l'entrée chassée de la première ligne de P par cette insertion inverse, on obtient ainsi une suite de couples

$$(u_k, v_k).$$

En répétant cette opération jusqu'à disparition complète des deux tableaux, on obtient un bimot

$$\omega = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{pmatrix}.$$

Définition 1.8. Un bimot est un tableau de deux lignes de même longueur comme ci-dessus, avec $u_i \in \mathbb{Z}$, $v_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq r$.

Le point essentiel est que ce bimot est naturellement ordonné lexicographiquement. En effet, comme on supprime à chaque étape une entrée maximale de Q , les entrées obtenues dans la première ligne vérifient

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_r.$$

Il reste à expliquer pourquoi, lorsque deux entrées consécutives de la première ligne sont égales, les entrées correspondantes de la seconde ligne sont ordonnées dans le bon sens. Supposons donc que

$$u_{k-1} = u_k.$$

Dans le processus inverse, l'entrée u_k est obtenue en supprimant dans Q_k une case contenant une entrée maximale. S'il y a plusieurs cases contenant cette même entrée maximale, on choisit, par convention, celle qui est la plus à droite.

Ainsi, si $u_{k-1} = u_k$, les deux étapes successives suppriment deux cases portant la même entrée dans le tableau Q . La case supprimée lors de la première de ces deux étapes, que l'on note B' , est donc située strictement à droite de la case supprimée à l'étape suivante, que l'on note B . Autrement dit,

$$B' \text{ est strictement à droite de } B.$$

On applique alors le lemme de bumping par lignes aux deux insertions correspondantes, vues dans le sens direct. Ce lemme décrit la position relative des routes de bumping de deux insertions successives. Dans la situation où la nouvelle case associée à la seconde insertion est strictement à droite de celle associée à la première, l'entrée éjectée de la première ligne lors de l'insertion inverse correspondante est plus grande ou égale à l'autre. Par conséquent, les deux valeurs v_{k-1} et v_k obtenues par insertion inverse vérifient

$$v_{k-1} \leq v_k.$$

On obtient donc bien la condition lexicographique

$$u_{k-1} = u_k \implies v_{k-1} \leq v_k.$$

Ainsi, les colonnes

$$\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

sont rangées selon l'ordre lexicographique :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \iff u < u' \text{ ou bien } u = u' \text{ et } v \leq v'.$$

On obtient donc un bimot lexicographique

$$\omega = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$$

Dans cette généralisation, le rôle du mot est donc joué par un tel bimot. La première ligne enregistre les entrées provenant de Q , tandis que la seconde ligne enregistre les lettres extraites de P par insertion inverse.

Réciproquement, soit

$$\omega = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$$

un bimot lexicographique. On construit une suite de paires de tableaux (P_k, Q_k) , $1 \leq k \leq r$, de la manière suivante. On pose d'abord

$$P_1 = \boxed{v_1}, \quad Q_1 = \boxed{u_1}.$$

Supposons (P_{k-1}, Q_{k-1}) construit. On insère v_k dans P_{k-1} par insertion par ligne, ce qui donne un nouveau tableau P_k . Cette insertion ajoute une nouvelle case au diagramme de Young. On ajoute alors à Q_{k-1} une case dans la même position, et l'on y place u_k . On obtient ainsi un tableau Q_k .

On sait que chaque P_k est un tableau par la construction de l'insertion par ligne. Il reste à vérifier que chaque Q_k est un tableau semi-standard. La croissance faible des lignes de Q_k vient de la condition

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_r.$$

Il faut donc seulement vérifier la croissance stricte des colonnes.

Supposons que, lors de la construction de Q_k , l'entrée u_k soit placée sous une entrée u_i , avec $i < k$. Nous devons montrer que

$$u_i < u_k.$$

Raisonnons par contradiction. Si

$$u_i = u_k.$$

Il s'ensuit que

$$u_i = u_{i+1} = \cdots = u_k.$$

Par la condition lexicographique, on obtient alors

$$v_i \leq v_{i+1} \leq \cdots \leq v_k.$$

On applique maintenant le lemme de bumping par lignes aux insertions successives des lettres

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_k.$$

Comme ces lettres sont faiblement croissantes, le lemme implique que les nouvelles cases ajoutées lors de ces insertions se trouvent dans des colonnes différentes. En particulier, la case ajoutée à l'étape k ne peut pas se trouver dans la même colonne que la case ajoutée à l'étape i .

Mais cela contredit le fait que u_k a été placé sous u_i dans Q_k . On doit donc avoir

$$u_i < u_k.$$

Ainsi les colonnes de Q_k sont strictement croissantes, et Q_k est bien un tableau semi-standard.

Donc on a montré

Théorème 1.9 (Correspondance RSK). *Soit $\text{RSK}(\omega) = (P, Q)$. Alors :*

(1) *Pour les bimots ayant r colonnes, RSK donne une bijection*

$$\{\text{bimots lexicographiques ayant } r \text{ colonnes}\} \longleftrightarrow \left\{ (P, Q) \left| \begin{array}{l} P, Q \text{ sont semi-standards,} \\ \text{forme}(P) = \text{forme}(Q) = \lambda, \\ \lambda \vdash r \end{array} \right. \right\}.$$

Les entrées de P sont les éléments de la ligne inférieure de ω , et les entrées de Q sont les éléments de la ligne supérieure de ω .

(2) *Pour les mots de longueur r , RSK donne une bijection*

$$\{\text{mots de longueur } r\} \longleftrightarrow \left\{ (P, Q) \left| \begin{array}{l} P \text{ est semi-standard,} \\ Q \text{ est standard,} \\ \text{forme}(P) = \text{forme}(Q) = \lambda, \\ \lambda \vdash r \end{array} \right. \right\}.$$

(3) *Pour les permutations, RSK donne une bijection*

$$S_n \longleftrightarrow \left\{ (P, Q) \left| \begin{array}{l} P, Q \text{ sont tableaux standards de forme } \lambda, \\ \lambda \vdash n \end{array} \right. \right\}.$$

Cette construction possède une traduction naturelle dans le langage des matrices. Une classe d'équivalence de bimots peut être identifiée à une collection de couples

$$(i, j), \quad i \in [m], \quad j \in [n],$$

chaque couple apparaissant avec une certaine multiplicité. Ces données sont entièrement décrites par une matrice

$$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{N}),$$

où l'entrée a_{ij} est le nombre d'occurrences de la colonne $\binom{i}{j}$ dans le bimot. Ainsi,

$$a_{ij} = \# \{ k \mid u_k = i, v_k = j \}.$$

La somme des entrées de la i -ième ligne compte le nombre de colonnes de ω dont l'entrée supérieure est i . Sous la correspondance RSK, ces entrées supérieures deviennent les entrées du tableau Q . Ainsi on a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \#\{\text{occurrences de } i \text{ dans } Q\}.$$

De même, la somme des entrées de la j -ième colonne compte le nombre de colonnes de ω dont l'entrée inférieure est j . Sous la correspondance RSK, ces entrées inférieures deviennent les entrées du tableau P . Donc

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} = \#\{\text{occurrences de } j \text{ dans } P\}.$$

Autrement dit, les sommes des lignes de A donnent le contenu de Q , et les sommes des colonnes de A donnent le contenu de P .

1.4. Matrices boules. Maintenant nous donnons un algorithme direct qui associe à une matrice A une paire $(P, Q) = (P(A), Q(A))$ de tableaux sans revenir à un mot bi-ligne. Nous appellerons cette procédure la *construction des boules matricielles*.

Nous utiliserons la notation suivante pour décrire la position relative de deux cases dans un diagramme, ou pour comparer les positions de certaines entrées dans une matrice. Nous dirons qu'une case B' est *Ouest* de B si la colonne de B' est strictement à gauche de la colonne de B . Nous dirons que B' est *ouest* de B si la colonne de B' est à gauche de, ou égale à, la colonne de B . Et les mêmes notations pour les autres directions.

Soit $A = (a(i, j))$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients entiers positifs ou nuls. Dans chaque position (i, j) de la matrice, on place $a(i, j)$ boules. Lorsque plusieurs boules se trouvent dans une même position, on les ordonne arbitrairement en les disposant diagonalement du nord-ouest vers le sud-est.

On numérote maintenant toutes les boules de la matrice en procédant du coin supérieur gauche vers le coin inférieur droit. À chaque boule, on attribue le plus petit entier strictement plus grand que tous les entiers déjà attribués aux boules situées au nord-ouest d'elle. Une boule reçoit le numéro 1 s'il n'y a aucune boule située au nord-ouest d'elle.

Nous appellerons la configuration obtenue la *configuration des boules matricielles* associée à A , noté par $A^{(1)}$. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} =$$

1 2 3		4
4 5	6	7 8
6	7 8	9 10

La première ligne de $P = P(A)$ se lit directement sur cette configuration : on y inscrit, pour chaque entier, la colonne la plus à gauche dans laquelle cet entier apparaît. De même, la première ligne de $Q = Q(A)$ est obtenue en inscrivant, pour chaque entier, la ligne la plus haute dans laquelle cet entier apparaît.

Pour cet exemple, la première ligne du tableau P est (1111112233), la première ligne du tableau Q est (1111222233).

Pour continuer, on forme une nouvelle matrice de boules de la manière suivante. Supposons qu'il y ait $l > 1$ boules portant le même numéro k dans la matrice considérée. On place alors $l - 1$ boules dans une nouvelle matrice selon la règle suivante.

Les ℓ boules de $A^{(1)}$ portant le numéro k sont disposées en une chaîne allant du sud-ouest vers le nord-est. On place une boule à droite de chacune des boules de cette chaîne, sauf la dernière, directement sous la boule suivante. Ainsi, à partir d'une chaîne de longueur ℓ , on obtient $l - 1$ boules dans la nouvelle matrice.

On effectue cette opération pour chaque entier k . On obtient ainsi une nouvelle matrice de boules. On définit alors la matrice dérivée de A , notée A^b , en prenant pour entrée (i, j) le nombre de boules situées en position (i, j) dans cette nouvelle matrice de boules.

Enfin, on numérote les boules de cette nouvelle matrice selon la même règle que précédemment. On obtient ainsi une matrice de boules numérotées, que l'on note $A^{(2)}$. Dans l'exemple, cela donne la configuration suivante.

$$A^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{(2)} =$$

		1
	1	2 3

On peut ainsi obtenir la deuxième ligne du tableau P : (233) et la deuxième ligne du tableau Q : (233).

Avec le même algorithme, on a

$$(A^b)^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{(3)} =$$

		①

On peut ainsi obtenir la troisième ligne du tableau $P : (3)$ et la troisième ligne du tableau $Q : (3)$.

Enfin, on obtient

$$P = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & & & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 & & & & & & & \\ \hline 3 & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Réciproquement, nous introduisons comment passer d'une paire (P, Q) de tableaux de Young de même forme à la matrice correspondante.

Notre opération de base consistait à associer à une matrice A une paire de lignes de même longueur, à savoir les premières lignes de la paire (P, Q) , ainsi qu'une matrice $B = A^b$. Si ces deux lignes sont

$$(v_1, \dots, v_r) \quad \text{et} \quad (u_1, \dots, u_r),$$

alors la matrice B possède la propriété suivante : lorsque ses entrées sont remplacées par des boules, et que ces boules sont numérotées du nord-ouest vers le sud-est comme précédemment, toutes les boules portant le numéro k sont situées au sud-est de la case placée à la u_k -ième ligne et à la v_k -ième colonne.

Il reste donc à expliquer comment, étant donnée une paire de tableaux-lignes

$$(v_1, \dots, v_r) \quad \text{et} \quad (u_1, \dots, u_r),$$

ainsi qu'une matrice B vérifiant cette propriété, on peut retrouver la matrice A .

Pour cela, on numérote les boules de B d'une manière différente, avec des numéros qui peuvent être plus grands que dans le numérotage précédent, en procédant du sud-est vers le nord-ouest.

Une boule de B au sud ou à l'est de laquelle il n'y a aucune autre boule reçoit le plus grand entier k tel que la case située à la u_k -ième ligne et à la v_k -ième colonne soit strictement au nord-ouest de cette boule.

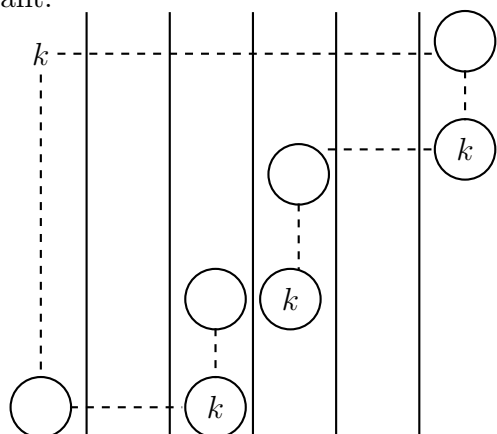
Une fois que toutes les boules situées au sud-est d'une boule donnée ont été numérotées, on attribue à cette boule le plus grand entier k tel que toutes les boules situées au sud ou à l'est de cette boule portent des numéros strictement plus grands que k , et tel que la case située à la u_k -ième ligne et à la v_k -ième colonne soit strictement au nord-ouest de cette boule.

Nous posons $B = A^b$, et $P = (1111112233)$ $Q = (1111222233)$.

$$B = A^b, \quad P_1 = (1111112233), \quad Q_1 = (1111222233).$$

1 2 3 4		
5 6	7 8	(4)
	(6)	(7) (8)

S'il existe $l - 1$ boules portant le numéro k , on place une boule comme dans le graphe suivant.



Si $l = 1$, on place simplement une boule à la position du k .
Enfin, on a

(1) (2) (3)		(4)
(4) (5)	(6)	(7) (8)
(6)	(7) (8)	(9) (10)

Ainsi on retrouve la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. DES APPLICATIONS

Dans cette section, nous allons utiliser la correspondance R-S-K pour montrer une formule de Cauchy,

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_n)$$

où la somme porte sur toutes les partitions λ de longueur au plus $\min(m, n)$.

Définition 2.1. À chaque partition λ ayant au plus m parts (lignes), on associe un polynôme symétrique

$$s_{\lambda}(x_1, \dots, x_m),$$

appelé *polynôme de Schur*. Ces polynômes peuvent être définis à l'aide des tableaux.

À toute numérotation T d'un diagramme de Young, on associe un monôme, noté x^T , qui est le produit des variables x_i correspondant aux entiers i qui apparaissent dans T . C'est-à-dire,

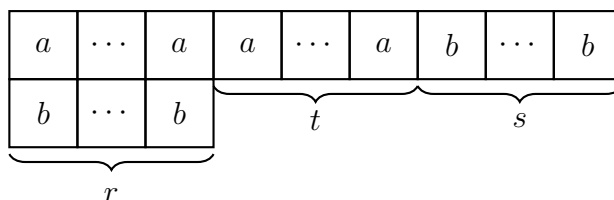
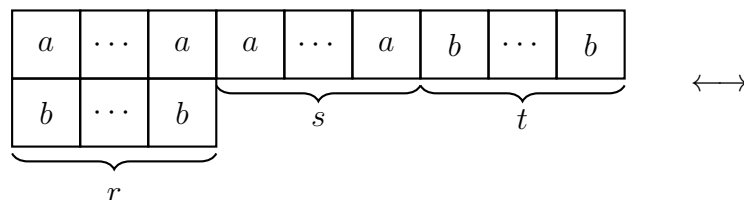
$$x^T = \prod_{i=1}^m x_i^{\text{nombre d'occurrences de } i \text{ dans } T}.$$

Le polynôme de Schur $s_{\lambda}(x_1, \dots, x_m)$ est la somme $s_{\lambda}(x_1, \dots, x_m) = \sum_T x^T$ de tous les monômes provenant des tableaux T de forme λ utilisant les entiers de 1 à m .

Proposition 2.2. *Etant donné une forme λ , le nombre de tableaux de forme λ contenant m_1 fois le symbole 1, m_2 fois le symbole 2, $\dots$, m_n fois le symbole n est égal au nombre de tableaux de forme λ contenant $m_{\sigma(1)}$ fois le symbole 1, $m_{\sigma(2)}$ fois le symbole 2, $\dots$, $m_{\sigma(n)}$ fois le symbole n , pour toute permutation $\sigma \in S_n$.*

Avant la preuve, regardons un exemple important.

Exemple 2.3. $\lambda = (r + s + t, r), m_1 = r + s, m_2 = r + t$



Démonstration. Soit λ une partition quelconque et fixons un tableau P de forme λ . Grâce à la correspondance de Robinson–Schensted–Knuth entre paires (P, Q) et matrices A , la proposition est équivalente à l'assertion suivante :

les deux ensembles

$$\{ A : P(A) = P \text{ et } A \text{ a pour sommes de lignes } m_1, \dots, m_n \}$$

et

$$\{ A : P(A) = P \text{ et } A \text{ a pour sommes de lignes } m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(n)} \}$$

ont le même cardinal.

Il suffit de démontrer ce résultat lorsque $\sigma = (k, k+1)$, pour $1 \leq k < n$, puisque ces transpositions engendrent le groupe symétrique S_n .

Soit A appartenant au premier ensemble. Écrivons

$$A = \begin{pmatrix} B \\ C \\ D \end{pmatrix},$$

où B est formée des $k-1$ premières lignes de A , C des deux lignes suivantes, et D des lignes restantes.

Il résulte immédiatement de la construction de $P(A)$ par insertion ligne par ligne que $P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$.

D'après le cas étudié précédemment — traduit dans le langage des matrices — il existe une bijection entre les matrices C ayant pour sommes de lignes m_k et m_{k+1} et les matrices C' ayant pour sommes de lignes m_{k+1} et m_k , telle que $P(C) = P(C')$.

On obtient alors

$$A' = \begin{pmatrix} B \\ C' \\ D \end{pmatrix},$$

qui est la matrice correspondante dans le second ensemble.

Ainsi, les deux ensembles ont le même cardinal.

□

Par exemple, on prend

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

on peut voir que $m_2 = 5, m_3 = 8$ et si on voudrait interchanger la deuxième ligne et la troisième ligne, alors on considère le bimot lexicographique

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et puis par la correspondance RSK, on a deux tableaux P, Q

$$P = \begin{pmatrix} 1111122223 \\ 233 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 2222233333 \\ 333 \end{pmatrix}$$

Comme l'exemple 2.2, on change le tableau Q par interchanger s et t .

$$Q' = \begin{pmatrix} 2222222233 \\ 333 \end{pmatrix}$$

avec cette tableau, on utilise l'algorithme dans la section précédente et obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m),$$

où la somme porte sur toutes les partitions λ .

Démonstration. On développe d'abord le membre de gauche :

$$\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m \frac{1}{1 - x_j y_i} = \sum_A \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (x_j y_i)^{a(i,j)},$$

où la somme porte sur toutes les matrices

$$A = (a(i, j))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

à coefficients entiers positifs ou nuls.

Pour une telle matrice, posons

$$c_j(A) = \sum_{i=1}^m a(i, j)$$

pour la somme de la j -ième colonne, et

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n a(i, j)$$

pour la somme de la i -ième ligne. Alors

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (x_j y_i)^{a(i,j)} = \prod_{j=1}^n x_j^{c_j(A)} \prod_{i=1}^m y_i^{r_i(A)}.$$

En effet, la variable x_i apparaît une fois pour chaque boule située dans la ligne i , tandis que la variable y_j apparaît une fois pour chaque boule située dans la colonne j . On peut donc écrire

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_A x^{\text{row}(A)} y^{\text{col}(A)},$$

où

$$x^{\text{row}(A)} = x_1^{r_1(A)} \dots x_n^{r_n(A)}$$

et

$$y^{\text{col}(A)} = y_1^{c_1(A)} \dots y_m^{c_m(A)}.$$

D'autre part, la correspondance RSK associe bijectivement à une matrice A à coefficients entiers positifs ou nuls une paire de tableaux semi-standards (P, Q) de même forme λ . Dans cette correspondance, les entrées de P appartiennent à $\{1, \dots, n\}$, et les entrées de Q appartiennent à $\{1, \dots, m\}$. De plus, la correspondance conserve les multiplicités : le nombre d'occurrences de i dans P est égal à la somme de la i -ième ligne de A , c'est-à-dire

$$\#\{\text{entrées égales à } i \text{ dans } P\} = r_i(A),$$

et le nombre d'occurrences de j dans Q est égal à la somme de la j -ième colonne de A , c'est-à-dire

$$\#\{\text{entrées égales à } j \text{ dans } Q\} = c_j(A).$$

Ainsi, si A correspond à (P, Q) , on a

$$x^{\text{row}(A)} y^{\text{col}(A)} = x^{\text{wt}(P)} y^{\text{wt}(Q)}.$$

Ici

$$x^{\text{wt}(P)} = \prod_{i=1}^n x_i^{\#\{i \text{ dans } P\}},$$

et

$$y^{\text{wt}(Q)} = \prod_{j=1}^m y_j^{\#\{j \text{ dans } Q\}}.$$

Par la correspondance RSK, la matrice A correspond à une paire (P, Q) de tableaux semi-standards de même forme. Avec la convention utilisée ici, les entrées de P appartiennent à $\{1, \dots, n\}$ et enregistrent les indices de colonnes, tandis que les entrées de Q appartiennent à $\{1, \dots, m\}$ et enregistrent les indices de lignes.

Ainsi, le nombre d'occurrences de j dans P est

$$c_j(A) = \sum_{i=1}^m a(i, j),$$

et le nombre d'occurrences de i dans Q est

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^n a(i, j).$$

Par conséquent,

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (x_j y_i)^{a(i, j)} = x^{\text{wt}(P)} y^{\text{wt}(Q)}.$$

En regroupant cette dernière somme selon la forme commune λ de P et Q , on obtient

$$\sum_{(P, Q)} x^{\text{wt}(P)} y^{\text{wt}(Q)} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\substack{P \text{ semi-standard} \\ \text{shape}(P)=\lambda \\ \text{entries}(P) \subseteq \{1, \dots, n\}}} x^{\text{wt}(P)} \right) \left(\sum_{\substack{Q \text{ semi-standard} \\ \text{shape}(Q)=\lambda \\ \text{entries}(Q) \subseteq \{1, \dots, m\}}} y^{\text{wt}(Q)} \right).$$

Or, par définition de la fonction de Schur comme fonction génératrice des tableaux semi-standards, on a

$$\sum_{(P, Q)} x^{\text{wt}(P)} y^{\text{wt}(Q)} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m).$$

En combinant cette égalité avec le développement du membre de gauche, on obtient

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m).$$

□

Exemple 2.4. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici A est une matrice 2×4 . Ainsi, l'indice de ligne $i \in [2]$ correspond aux variables y_i , tandis que l'indice de colonne $j \in [4]$ correspond aux variables x_j .

Le bi-mot associé est obtenu en prenant $a(i, j)$ copies de la colonne

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par la correspondance RSK, cette matrice correspond à une paire de tableaux semi-standards (P, Q) de même forme, où les entrées de P appartiennent à $[4]$ et les entrées de Q appartiennent à $[2]$. Avec la convention utilisée ici, les sommes des colonnes de A déterminent le contenu de P , tandis que les sommes des lignes de A déterminent le contenu de Q .

En effet, les sommes des colonnes de A sont

$$(3, 4, 1, 1).$$

Ainsi,

$$\text{cont}(P) = (3, 4, 1, 1),$$

et donc

$$x^P = x_1^3 x_2^4 x_3 x_4.$$

D'autre part, les sommes des lignes de A sont

$$(4, 5).$$

Ainsi,

$$\text{cont}(Q) = (4, 5),$$

et donc

$$y^Q = y_1^4 y_2^5.$$

Le monôme associé à A est

$$\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^4 (x_j y_i)^{a(i,j)}.$$

Dans cet exemple, cela donne

$$(x_1 y_1)^2 (x_2 y_1) (x_4 y_1) (x_1 y_2) (x_2 y_2)^3 (x_3 y_2).$$

En regroupant les puissances des variables x et y , on obtient

$$x_1^3 x_2^4 x_3 x_4 y_1^4 y_2^5.$$

Ainsi,

$$\prod_{i=1}^2 \prod_{j=1}^4 (x_j y_i)^{a(i,j)} = x^P y^Q.$$

Cet exemple illustre donc la propriété de préservation du poids dans la correspondance RSK : les sommes des colonnes de A donnent les exposants des variables x , tandis que les sommes des lignes de A donnent les exposants des variables y .

Proposition 2.5. *Soit f^λ le nombre de tableaux de Young standards de forme λ . Alors*

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

Démonstration. La correspondance de Robinson–Schensted donne une bijection entre les permutations de $\{1, \dots, n\}$ et les paires (P, Q) de tableaux de Young standards de même forme.

En effet, si $w \in S_n$, on applique l'algorithme d'insertion de Robinson–Schensted au mot

$$w = w_1 w_2 \cdots w_n.$$

On obtient alors une paire

$$(P(w), Q(w)),$$

où $P(w)$ et $Q(w)$ sont deux tableaux de Young standards de même forme $\lambda \vdash n$. Réciproquement, étant donnée une paire (P, Q) de tableaux de Young standards de même forme, l'algorithme d'insertion inverse permet de retrouver de manière unique la permutation $w \in S_n$.

Ainsi, le nombre de permutations de n éléments est égal au nombre de paires de tableaux de Young standards de même forme. Si l'on fixe la forme commune λ , il y a f^λ choix possibles pour P et f^λ choix possibles pour Q . Le nombre de telles paires de forme λ est donc

$$(f^\lambda)^2.$$

En sommant sur toutes les partitions $\lambda \vdash n$, on obtient

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2.$$

□

3. INSERTION PAR COLONNE

Définition 3.1 (Insertion par colonne). Il existe une construction duale de l'insertion par ligne, appelée *insertion par colonne* ou *column bumping*. Et on va l'utiliser pour montrer une autre identité similaire. Elle prend un entier positif x et un tableau T , et insère x de la manière suivante.

Si x est strictement plus grand que toutes les entrées de cette colonne, alors on place x dans une nouvelle case au bas de la première colonne.

Sinon, x chasse l'entrée la plus haute, c'est-à-dire la plus petite, parmi les entrées de la première colonne qui sont $\geq x$. L'entrée ainsi chassée est alors déplacée vers la colonne suivante.

Le processus continue jusqu'à ce que l'entrée chassée puisse être placée à la fin de la colonne suivante, ou jusqu'à ce qu'elle devienne l'unique entrée d'une nouvelle colonne.

Analogue à l'insertion par ligne, on a aussi

Proposition 3.2. *Soit T un tableau, c'est-à-dire les lignes sont faiblement croissantes et dont les colonnes sont strictement croissantes. Soit x un entier positif. Alors l'insertion par colonne de x dans T produit encore un tableau.*

Lemme 3.3 (Lemme de bumping par colonne). *Soit T un tableau. On insère successivement deux entiers x et x' par insertion par colonne. Notons C et C' les routes de bumping correspondantes, et B, B' les nouvelles cases créées par ces deux insertions.*

- (1) *Si $x < x'$, alors la route C' est située strictement en dessous de la route C . En particulier, la nouvelle case B' est strictement en dessous de B et faiblement à gauche de B .*
- (2) *Si $x \geq x'$, alors la route C' est située faiblement au-dessus de la route C . De plus, C' continue au moins une colonne plus à droite que C . En particulier, la nouvelle case B' est faiblement au-dessus de B et strictement à droite de B .*

Démonstration. Supposons d'abord que $x < x'$, et que x chasse un élément y de la première colonne. Par définition de l'insertion par colonne, y est l'entrée la plus haute de cette colonne qui est $\geq x$. Ainsi, après cette opération, la case où y se trouvait contient x , et toutes les cases situées au-dessus contiennent des entrées strictement inférieures à x .

Comme $x < x'$, l'entrée y' chassée par x' dans la première colonne doit se trouver strictement au dessous de la case où x a chassé y .

Le même raisonnement s'applique alors à la colonne suivante, donc la route C' reste strictement au dessous de la route C .

De plus, la route C ne peut pas s'arrêter strictement à gauche de la route C' . Si C' s'arrête en premier, alors C , qui reste toujours strictement au-dessus de C' , ne se déplace jamais en dessous de C' . Par conséquent, la nouvelle case B' est strictement en dessous de B et faiblement à gauche de B .

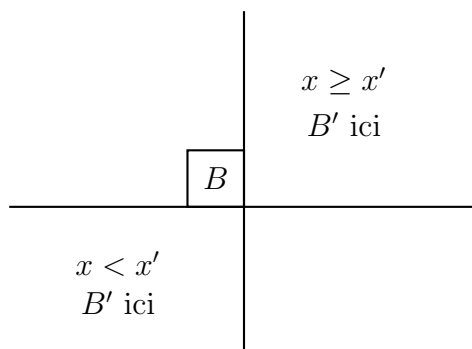
Supposons maintenant que $x \geq x'$. Supposons que x et x' chassent respectivement les éléments y et y' de la première colonne. Puisque $x' \leq x$, la case dans laquelle x' chasse un élément doit être située au-dessus, ou dans la même position, que la case dans laquelle x chasse un élément.

Dans tous les cas, l'élément chassé par x' est inférieur ou égal à l'élément chassé par x , c'est-à-dire

$$y' \leq y.$$

Le même argument se répète de colonne en colonne. Ainsi la route C' reste faiblement au-dessus de la route C .

Enfin, comme les éléments dans la route de C' sont inférieurs ou égaux à ceux dans la route de C , la route C' doit continuer au moins une colonne plus à droite que C . La nouvelle case B' est donc faiblement au-dessus de B et strictement à droite de B . $\square$



Soit

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$$

un tableau bi-ligne lexicographique. On effectue les insertions par colonne dans l'ordre

$$v_r \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_1,$$

et l'on place ensuite les entrées

$$u_1, \dots, u_r$$

dans les nouvelles cases ainsi créées. Le remplissage ainsi obtenu est faiblement croissant dans les lignes et dans les colonnes, mais ce n'est pas, toujours un tableau.

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \right).$$

Cependant, si chaque paire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le tableau bi-ligne apparaît au plus une fois, alors ce second remplissage est en fait strictement croissant dans les lignes. En remplaçant ce remplissage par son conjugué, on obtient une paire $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ de tableaux dont les formes sont conjuguées. On appellera cette procédure le *placement conjugué* de $u_1, \dots, u_r$.

Expliquons pourquoi l'absence de paires répétées implique la stricte croissance dans les lignes. Comme le tableau bi-ligne est lexicographique, on a

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_r.$$

Ainsi, lorsque l'on place les u_i dans l'ordre des insertions, les entrées placées sont déjà faiblement croissantes. Le seul problème possible vient donc du cas où deux entrées égales apparaissent :

$$u_i = u_k, \quad i < k.$$

Dans ce cas, puisque la paire $\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ ne se répète pas, on ne peut pas avoir $v_i = v_k$. De plus, l'ordre lexicographique impose alors $v_i < v_k$.

On applique maintenant le lemme de bumping par colonne. Comme les insertions sont effectuées dans l'ordre $v_1, \dots, v_r$, l'insertion correspondant à v_i est effectuée avant celle correspondant à v_k . Or

$$v_i < v_k.$$

Le lemme de bumping par colonne implique donc que la nouvelle case créée par l'insertion de v_k est strictement au-dessous et faiblement à gauche de la nouvelle case créée par l'insertion de v_i .

Après conjugaison des positions, cette relation devient

$$B'_k \text{ est northEast de } B'_i,$$

c'est-à-dire que B'_k est faiblement au-dessus et strictement à droite de B'_i . Par conséquent, dans $\tilde{Q}$, l'entrée u_k est placée strictement à droite de l'entrée u_i .

Ainsi, deux entrées égales ne peuvent jamais apparaître dans une même colonne de $\tilde{Q}$. Comme les entrées de $\tilde{Q}$ sont déjà faiblement croissantes dans les lignes, on en déduit que les lignes sont faiblement croissantes et que les colonnes sont strictement croissantes. Donc $\tilde{Q}$ est bien un tableau.

Proposition 3.4 (Procédure de Knuth pour les matrices 0-1). *Soit*

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_r \end{pmatrix}$$

un tableau bi-ligne lexicographique sans paires répétées. On effectue les insertions par colonne

$$v_r \longrightarrow v_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_1.$$

On note $\tilde{P}$ le tableau d'insertion obtenu.

Pour chaque k , soit B_k la nouvelle case créée lors de l'insertion de v_k . On construit un second remplissage $\tilde{Q}$ en plaçant u_k dans la case conjuguée B'_k . Alors

$$(\tilde{P}, \tilde{Q})$$

est une paire de tableaux dont les formes sont conjuguées.

Démonstration. Par définition de l'insertion par colonne, l'insertion successive des lettres

$$v_r, \dots, v_1$$

produit un tableau. Ainsi $\tilde{P}$ est bien un tableau.

Il reste donc à vérifier que le remplissage $\tilde{Q}$, obtenu en plaçant les u_k dans les conjuguées des nouvelles cases, est lui aussi un tableau. Par construction, si

$$\text{forme}(\tilde{P}) = \lambda,$$

alors les cases de $\tilde{Q}$ sont les conjuguées des cases de $\tilde{P}$. Donc

$$\text{forme}(\tilde{Q}) = \lambda'.$$

Les deux formes sont donc conjuguées.

Montrons maintenant que $\tilde{Q}$ est un tableau. Comme le tableau bi-ligne est lexicographique, on a

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_r.$$

Ainsi, si l'on place les u_k dans les nouvelles cases, les entrées sont naturellement faiblement croissantes dans l'ordre des indices. Le seul point à contrôler est l'absence d'égalités dans une même colonne de $\tilde{Q}$.

Supposons donc que

$$i < k \quad \text{et} \quad u_i = u_k.$$

Comme le tableau bi-ligne n'a pas de paire répétée, on ne peut pas avoir

$$v_i = v_k.$$

Or l'ordre lexicographique demande que

$$v_i < v_k.$$

Les insertions sont effectuées dans l'ordre

$$v_1, \dots, v_r.$$

Ainsi l'insertion de v_i a lieu avant celle de v_k . Puisque

$$v_i < v_k,$$

le lemme de bumping par colonne implique que la nouvelle case B_k , créée par l'insertion de v_k , est strictement au-dessous et faiblement à gauche de la nouvelle case B_i , créée par l'insertion de v_i .

En passant aux cases conjuguées, cette relation devient : B'_k est strictement à droite et faiblement au-dessus de B'_i . Par conséquent, dans $\tilde{Q}$, l'entrée u_k est placée strictement à droite de l'entrée u_i .

Ainsi, deux entrées égales de $\tilde{Q}$ ne peuvent jamais appartenir à une même colonne. Comme les entrées de $\tilde{Q}$ sont déjà faiblement croissantes dans les lignes, on en déduit que les lignes sont faiblement croissantes et que les colonnes sont strictement croissantes.

Donc $\tilde{Q}$ est bien un tableau. Finalement, $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ est une paire de tableaux, et leurs formes sont conjuguées. $\square$

Corollaire 3.5 (L'identité de Cauchy "duale"). *On a l'identité*

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda'}(y_1, \dots, y_m),$$

où la somme porte seulement sur les partitions λ ayant au plus n lignes et au plus m colonnes.

Démonstration. On développe d'abord le membre de gauche. Chaque facteur $1 + x_i y_j$ signifie que l'on choisit ou non la paire (i, j) . Ainsi

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 + x_i y_j)$$

est la série génératrice des matrices 0-1 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Plus précisément, si

$$r_i(A) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \quad \text{et} \quad c_j(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij},$$

alors le poids de A est $x_1^{r_1(A)} \cdots x_n^{r_n(A)} y_1^{c_1(A)} \cdots y_m^{c_m(A)}$. On a donc

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 + x_i y_j) = \sum_A x_1^{r_1(A)} \cdots x_n^{r_n(A)} y_1^{c_1(A)} \cdots y_m^{c_m(A)},$$

où la somme porte sur toutes les matrices 0-1 de taille $n \times m$.

D'après la procédure de Knuth pour les matrices 0-1, une telle matrice correspond à une paire de tableaux (P, Q) dont les formes sont conjuguées. On choisit la notation de sorte que

$$\text{shape}(Q) = \lambda \quad \text{et} \quad \text{shape}(P) = \lambda'.$$

Le tableau Q contient les indices de lignes i , donc ses entrées appartiennent à $\{1, \dots, n\}$. Le tableau P contient les indices de colonnes j , donc ses entrées appartiennent à $\{1, \dots, m\}$.

De plus, la procédure conserve les multiplicités des lettres. Ainsi, si α_i désigne le nombre de lettres i dans Q , alors

$$\alpha_i = r_i(A).$$

De même, si β_j désigne le nombre de lettres j dans P , alors

$$\beta_j = c_j(A).$$

Le poids de la matrice A peut donc s'écrire

$$x^{\text{wt}(Q)} y^{\text{wt}(P)} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}.$$

En regroupant les matrices A selon la forme λ du tableau Q , on obtient

$$\sum_A x^{\text{wt}(Q)} y^{\text{wt}(P)} = \sum_{\lambda} \left(\sum_{\text{shape}(Q)=\lambda} x^{\text{wt}(Q)} \right) \left(\sum_{\text{shape}(P)=\lambda'} y^{\text{wt}(P)} \right).$$

Or, par définition des fonctions de Schur comme séries génératrices des tableaux semi-standards,

$$\sum_{\text{shape}(Q)=\lambda} x^{\text{wt}(Q)} = s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n),$$

et

$$\sum_{\text{shape}(P)=\lambda'} y^{\text{wt}(P)} = s_{\lambda'}(y_1, \dots, y_m).$$

Par conséquent,

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda'}(y_1, \dots, y_m).$$

Enfin, les tableaux Q ont des entrées dans $\{1, \dots, n\}$, donc λ a au plus n lignes. De même, les tableaux P ont des entrées dans $\{1, \dots, m\}$, et comme

$$\text{shape}(P) = \lambda',$$

la partition λ' a au plus m lignes, ce qui équivaut à dire que λ a au plus m colonnes. Ainsi seules les partitions λ ayant au plus n lignes et au plus m colonnes interviennent. $\square$

4. REPRÉSENTATION DE S_n

4.1. Actions de S_n sur les tableaux. Le groupe symétrique S_n est le groupe des automorphismes de l'ensemble $[n]$, agissant à gauche, de sorte que

$$(\sigma \cdot \tau)(i) = \sigma(\tau(i)).$$

Dans ce chapitre, T et T' désigneront des numérotations d'un diagramme de Young à n cases par les nombres de 1 à n , sans répétition. Le groupe symétrique S_n agit sur l'ensemble de telles numérotations : $\sigma \cdot T$ est la numérotation qui place $\sigma(i)$ dans la case où T place i .

Pour une numérotation T , on dispose d'un sous-groupe $R(T)$ de S_n , appelé le *groupe des lignes* de T , qui est formé des permutations permutant les entrées de chaque ligne. Si

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0)$$

est la forme de T , alors $R(T)$ est un produit de groupes symétriques

$$S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_k}.$$

Un tel sous-groupe de S_n est appelé un *sous-groupe de Young*. De même, on définit le *groupe des colonnes* $C(T)$ comme le sous-groupe des permutations préservant les colonnes. Ces sous-groupes sont compatibles avec l'action :

$$(1) \quad R(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot R(T) \cdot \sigma^{-1} \quad \text{et} \quad C(\sigma \cdot T) = \sigma \cdot C(T) \cdot \sigma^{-1}.$$

Soient $\tau \in R(T)$, $\sigma \in S_n$, on a toujours

$$\sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1}(\sigma(a_1) \dots \sigma(a_k)) = (\sigma(\tau a_1) \dots \sigma(\tau a_k))$$

De plus, on a besoin d'un ordre pour les partitions

Définition 4.1. Soient $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$ deux partitions de n . On dit que μ est dominée par λ , et l'on écrit

$$\mu \preceq \lambda,$$

si, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\mu_1 + \dots + \mu_k \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_k.$$

Autrement dit, λ domine μ si les sommes partielles des parts de λ sont toujours supérieures ou égales à celles de μ .

Lemme 4.2. Soient T et T' deux numérotations des diagrammes de Young de formes respectives λ et λ' . On suppose que λ ne domine pas strictement λ' . Alors exactement l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :

- (1) il existe deux entiers distincts qui appartiennent à une même ligne de T' et à une même colonne de T ;
- (2) $\lambda' = \lambda$, et il existe $p' \in R(T')$ et $q \in C(T)$ tels que

$$p' \cdot T' = q \cdot T.$$

Démonstration. Supposons que l'assertion (i) soit fausse. Les entrées de la première ligne de T' doivent alors appartenir à des colonnes distinctes de T . Il existe donc un élément $q_1 \in C(T)$ tel que ces entrées apparaissent dans la première ligne de $q_1 \cdot T$.

De même, les entrées de la deuxième ligne de T' appartiennent à des colonnes distinctes de T , donc aussi à des colonnes distinctes de $q_1 \cdot T$. Il existe alors un élément

$$q_2 \in C(q_1 \cdot T) = C(T),$$

qui ne déplace pas les entrées égales à celles de la première ligne de T' , tel que ces entrées apparaissent toutes dans les deux premières lignes de $q_2 q_1 \cdot T$.

En continuant ainsi, on obtient des éléments $q_1, \dots, q_k \in C(T)$ tels que les entrées des k premières lignes de T' apparaissent dans les k premières lignes de

$$q_k q_{k-1} \cdots q_1 \cdot T.$$

En particulier, puisque T et $q_k \cdots q_1 \cdot T$ ont la même forme, on obtient

$$\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_k \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

Comme ceci est vrai pour tout k , on a

$$\lambda' \preceq \lambda.$$

Or, par hypothèse, λ ne domine pas strictement λ' . On doit donc avoir $\lambda = \lambda'$. En prenant k égal au nombre de lignes de λ , et en posant $q = q_k \cdots q_1$, on voit que $q \cdot T$ et T' ont les mêmes entrées dans chaque ligne. Il existe donc un élément $p' \in R(T')$ tel que

$$p' \cdot T' = q \cdot T.$$

□

Maintenant, on définit un ordre linéaire sur l'ensemble des numérotations à n cases de la manière suivante.

Définition 4.3 (Ordre sur les numérotations). Soient T et T' deux numérotations. On écrit

$$T' > T$$

si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- (1) la forme de T' est strictement plus grande que la forme de T pour l'ordre lexicographique sur les partitions ;
- (2) les numérotations T' et T ont la même forme, et le plus grand entier qui n'occupe pas la même case dans T' et dans T apparaît plus tôt dans le mot-colonne de T' que dans le mot-colonne de T . (Attention, on liste les entrées de bas en haut dans chaque colonne)

Proposition 4.4. Si T est un tableau standard, alors, pour tout

$$p \in R(T) \quad \text{et} \quad q \in C(T),$$

on a

$$p \cdot T \geq T \quad \text{et} \quad q \cdot T \leq T.$$

En effet, le plus grand entier de T déplacé par p est déplacé vers la gauche, tandis que le plus grand entier de T déplacé par q est déplacé vers le haut.

Corollaire 4.5. Soient T et T' deux tableaux standard tels que $T' > T$. Alors il existe une paire d'entiers distincts qui appartiennent à une même ligne de T' et à une même colonne de T .

Démonstration. Puisque $T' > T$, la forme de T ne peut pas dominer la forme de T' . Supposons qu'il n'existe pas de paire d'entiers distincts appartenant à une même ligne de T' et à une même colonne de T . Alors nous sommes dans le cas (ii) du lemme précédent. Il existe donc

$$p' \in R(T') \quad \text{et} \quad q \in C(T)$$

tels que $p' \cdot T' = q \cdot T$.

Comme T et T' sont des tableaux standard, la propriété précédente donne

$$q \cdot T \leq T \quad \text{et} \quad p' \cdot T' \geq T'.$$

On obtient donc $T' \leq p' \cdot T' = q \cdot T \leq T$. Cela contredit l'hypothèse $T' > T$. Par conséquent, il existe bien une paire d'entiers distincts appartenant à une même ligne de T' et à une même colonne de T . $\square$

4.2. Modules de Specht.

Définition 4.6 (Tabloïde). Un tabloïde est une classe d'équivalence de numérotations d'un diagramme de Young, avec les entiers distincts $1, \dots, n$, où deux numérotations sont équivalentes lorsque les lignes correspondantes contiennent les mêmes entrées. Le tabloïde déterminé par une numérotation T est noté $\{T\}$. Ainsi,

$$\{T'\} = \{T\} \iff T' = p \cdot T \text{ pour un certain } p \in R(T).$$

ou on peut définir par l'action de $R(T)$ sur les numérotations, le tabloïde associé à T , noté $\{T\}$, est l'orbite de T sous cette action :

$$\{T\} = R(T) \cdot T = \{p \cdot T \mid p \in R(T)\}.$$

Ainsi, deux numérotations T et T' définissent le même tabloïde si et seulement si elles sont dans la même orbite.

Soit maintenant T une numérotation d'un diagramme de Young à n cases, remplie par les entiers $1, \dots, n$, chacun apparaissant une seule fois. On définit deux éléments a_T et b_T de l'algèbre de groupe $\mathcal{A}$ par

$$a_T = \sum_{p \in R(T)} p, \quad b_T = \sum_{q \in C(T)} \text{sgn}(q)q.$$

Ici $R(T)$ désigne le stabilisateur des lignes de T , tandis que $C(T)$ désigne le stabilisateur des colonnes de T .

Proposition 4.7. Pour $p \in R(T), q \in C(T)$, on a

$$\begin{aligned} p \cdot a_T &= a_T \cdot p = a_T, & q \cdot b_T &= b_T \cdot q = \text{sgn}(q)b_T \\ a_T \cdot a_T &= \#R(T)a_T, & b_T \cdot b_T &= \#C(T)b_T \end{aligned}$$

Le but de cette partie est construire une représentation irréductible pour chaque classe de conjugaison ou en fait pour une partition λ de n .

Définition 4.8. Soit $\lambda \vdash n$. On note M^λ l'espace vectoriel complexe ayant pour base l'ensemble des tabloïdes de forme λ :

$$M^\lambda = \bigoplus_{\{T\}} \mathbb{C}\{T\}.$$

Comme S_n agit sur l'ensemble des tabloïdes, cette action s'étend linéairement à M^λ , i.e., on peut regarder M^λ comme un $\mathcal{A}$ -module à gauche, où $\mathcal{A} = \mathbb{C}[S_n]$.

Pour toute numérotation T de forme λ , on définit

$$v_T = b_T \cdot \{T\} = \sum_{q \in C(T)} \text{sgn}(q)\{q \cdot T\} \in M^\lambda.$$

Il faut remarquer que l'élément v_T dépend du choix de la numérotation T . Si $T' = pT$ avec $p \in R(T)$, alors $\{T'\} = \{T\}$, mais en général $C(T') \neq C(T)$. On a cependant

$$C(T') = pC(T)p^{-1}$$

et donc

$$b_{T'} = pb_Tp^{-1}.$$

Par conséquent,

$$v_{T'} = b_{T'}\{T'\} = pb_Tp^{-1}\{pT\} = pb_T\{T\} = pv_T.$$

Ainsi, changer le représentant de la classe $\{T\}$ peut changer v_T . Et on a une proposition :

Proposition 4.9.

$$\sigma \cdot v_T = v_{\sigma \cdot T}$$

Lemme 4.10. Soient T et T' deux numérotations de formes respectivement λ et λ' . On suppose que λ ne domine pas strictement λ' . S'il existe deux entiers distincts qui appartiennent à une même ligne de T' et à une même colonne de T , alors

$$b_T \cdot \{T'\} = 0.$$

S'il n'existe pas une telle paire d'entiers, alors

$$b_T \cdot \{T'\} = \pm v_T.$$

Démonstration. Supposons d'abord qu'il existe une telle paire d'entiers. Soit t la transposition qui échange ces deux entiers. Comme ces deux entiers appartiennent à une même colonne de T , on a $t \in C(T)$. Par conséquent, $b_T \cdot t = -b_T$. En effet, multiplier à droite par t change le signe de chaque élément du groupe des colonnes $C(T)$.

D'autre part, ces deux entiers appartiennent à une même ligne de T' . Ainsi $t \in R(T')$, et donc $t \cdot \{T'\} = \{T'\}$. On en déduit

$$b_T \cdot \{T'\} = b_T \cdot (t \cdot \{T'\}) = (b_T \cdot t) \cdot \{T'\} = -b_T \cdot \{T'\}.$$

Ainsi, $b_T \cdot \{T'\} = 0$.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas de paire d'entiers distincts qui appartiennent à une même ligne de T' et à une même colonne de T . Par le lemme précédent, nous sommes alors dans le cas (ii). Il existe donc $p' \in R(T')$ et $q \in C(T)$ tels que $p' \cdot T' = q \cdot T$. Comme $p' \in R(T')$, on a

$$\{p' \cdot T'\} = \{T'\}.$$

Donc

$$b_T \cdot \{T'\} = b_T \cdot \{p' \cdot T'\} = b_T \cdot \{q \cdot T\} = b_T \cdot q \cdot \{T\}.$$

Comme $q \in C(T)$, on a $b_T q = \text{sgn}(q) b_T$. Par conséquent,

$$b_T \cdot \{T'\} = \text{sgn}(q) b_T \cdot \{T\} = \text{sgn}(q) v_T.$$

Comme $\text{sgn}(q) = \pm 1$, on obtient bien

$$b_T \cdot \{T'\} = \pm v_T.$$

□

Corollaire 4.11. Si T et T' sont deux tableaux standards avec $T' > T$, alors $b_T \cdot T' = 0$.

Démonstration. D'après la corollaire 4.5, il existe une paire d'entiers distincts qui appartiennent à une même ligne de T' et à une même colonne de T , et puis on applique le lemme 4.10. □

Définition 4.12 (Module de Specht). Soit $\lambda \vdash n$. On définit le *module de Specht* S^λ comme le sous-espace de M^λ engendré par les éléments v_T , lorsque T parcourt toutes les numérotations de forme λ . Autrement dit,

$$S^\lambda = \text{vect}_{\mathbb{C}} \{v_T \mid T \text{ est une numérotation de forme } \lambda\} \subseteq M^\lambda.$$

Il résulte de la proposition 4.9 que S^λ est stable sous l'action de S_n . Ainsi, S^λ est un sous- $\mathbb{C}[S_n]$ -module de M^λ .

Lemme 4.13. Aucun des éléments v_T n'est nul. En particulier, les modules de Specht S^λ sont tous non nuls. De plus, deux tels modules ne sont pas isomorphes lorsque leurs formes sont distinctes.

Démonstration. En effet, la définition 4.8 indique que les polytabloïdes v_T ne sont pas nuls, implique que, pour toute numérotation T de forme λ , on a

$$(5a) \quad b_T \cdot M^\lambda = b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C}v_T \neq 0,$$

$$(5b) \quad b_T \cdot M^{\lambda'} = b_T \cdot S^{\lambda'} = 0 \quad \text{si } \lambda' > \lambda.$$

Expliquons d'abord l'égalité (5a). L'espace M^λ a pour base les tabloïdes $\{T'\}$ de forme λ . D'après le lemme précédent, pour tout tel T' , on a

$$b_T \cdot \{T'\} = 0 \quad \text{ou} \quad b_T \cdot \{T'\} = \pm v_T.$$

Ainsi, $b_T \cdot M^\lambda \subseteq \mathbb{C}v_T$. Mais en prenant $T' = T$, on obtient $b_T \cdot \{T\} = v_T \neq 0$. Donc l'inclusion précédente est en fait $b_T \cdot M^\lambda = \mathbb{C}v_T$.

Comme $S^\lambda \subseteq M^\lambda$, on a évidemment

$$b_T \cdot S^\lambda \subseteq b_T \cdot M^\lambda = \mathbb{C}v_T.$$

Réciproquement, $v_T \in S^\lambda$ par définition du module de Specht. De plus,

$$b_T \cdot v_T = b_T \cdot (b_T \cdot \{T\}) = b_T^2 \cdot \{T\} = \#C(T)b_T \cdot \{T\}$$

Ainsi

$$b_T \cdot v_T = \#C(T)v_T \neq 0.$$

Il en résulte que $b_T \cdot S^\lambda$ contient un multiple non nul de v_T , donc $b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C}v_T$. Cela prouve (5a).

Pour (5b), soit T' une numérotation de forme λ' , avec $\lambda' > \lambda$. Alors λ ne domine pas strictement λ' . Si aucune paire d'entiers n'était située à la fois dans une même ligne de T' et dans une même colonne de T , le cas (ii) du lemme précédent impliquerait nécessairement $\lambda' = \lambda$, ce qui contredit $\lambda' > \lambda$. Il existe donc une telle paire, et le lemme donne $b_T \cdot \{T'\} = 0$. Comme les tabloïdes $\{T'\}$ forment une base de $M^{\lambda'}$, on obtient $b_T \cdot M^{\lambda'} = 0$. Puisque $S^{\lambda'} \subseteq M^{\lambda'}$, on a aussi

$$b_T \cdot S^{\lambda'} = 0.$$

□

Exemple 4.14. Nous illustrons la relation

$$b_T M^{\lambda'} = 0 \quad \text{lorsque} \quad \lambda' > \lambda$$

par un calcul explicite.

Prenons

$$\lambda = (2, 2), \quad \lambda' = (3, 1),$$

de sorte que

$$(3, 1) > (2, 2)$$

pour l'ordre de dominance. Considérons le numérotage

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

de forme $(2, 2)$. Les colonnes de T sont

$$\{1, 3\}, \quad \{2, 4\}.$$

Ainsi, le stabilisateur des colonnes de T est

$$C_T = \{\text{id}, (13), (24), (13)(24)\}.$$

Donc l'antisymétriseur de colonnes associé à T est

$$b_T = \text{id} - (13) - (24) + (13)(24).$$

si

$$T = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ & d & \end{array},$$

on note son tabloïde par

$$\{abc|d\}.$$

Par exemple,

$$\{123|4\} \quad \text{désigne le tabloïde associé au tableau} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & \end{array}.$$

Nous calculons maintenant l'action de b_T sur le module de permutation $M^{(3,1)}$. Une base de $M^{(3,1)}$ est donnée par les tabloïdes

$$\{123|4\}, \quad \{124|3\}, \quad \{134|2\}, \quad \{234|1\}.$$

Nous allons montrer que b_T annule chacun de ces tabloïdes.

Tout d'abord,

$$(13)\{123|4\} = \{123|4\},$$

car 1 et 3 appartiennent à la même ligne du tabloïde $\{123|4\}$. De plus,

$$(24)\{123|4\} = \{134|2\},$$

et

$$(13)(24)\{123|4\} = \{134|2\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_T\{123|4\} &= \{123|4\} - (13)\{123|4\} - (24)\{123|4\} + (13)(24)\{123|4\} \\ &= \{123|4\} - \{123|4\} - \{134|2\} + \{134|2\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même,

$$(13)\{124|3\} = \{234|1\},$$

$$(24)\{124|3\} = \{124|3\},$$

car 2 et 4 appartiennent à la même ligne de $\{124|3\}$, et

$$(13)(24)\{124|3\} = \{234|1\}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} b_T\{124|3\} &= \{124|3\} - \{234|1\} - \{124|3\} + \{234|1\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$(13)\{134|2\} = \{134|2\},$$

car 1 et 3 appartiennent à la même ligne de $\{134|2\}$. Par ailleurs,

$$(24)\{134|2\} = \{123|4\},$$

et

$$(13)(24)\{134|2\} = \{123|4\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} b_T\{134|2\} &= \{134|2\} - \{134|2\} - \{123|4\} + \{123|4\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin,

$$(13)\{234|1\} = \{124|3\},$$

$$(24)\{234|1\} = \{234|1\},$$

car 2 et 4 appartiennent à la même ligne de $\{234|1\}$, et

$$(13)(24)\{234|1\} = \{124|3\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_T\{234|1\} &= \{234|1\} - \{124|3\} - \{234|1\} + \{124|3\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que b_T annule chaque tabloïde de la base de $M^{(3,1)}$. Il en résulte que

$$b_TM^{(3,1)} = 0.$$

Ce calcul explicite illustre le fait général suivant : si $\lambda' > \lambda$, alors l'antisymétriseur de colonnes b_T associé à un numérotage T de forme λ annule le module de permutation $M^{\lambda'}$.

Ces égalités montrent aussi que les modules S^λ ne sont pas isomorphes deux à deux. Supposons en effet que

$$S^\lambda \simeq S^{\lambda'}$$

avec $\lambda' > \lambda$. Alors l'action de l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[S_n]$ devrait être compatible avec cet isomorphisme.

Or, d'après (5a), l'élément $b_T \in \mathcal{A}$ agit non trivialement sur S^λ , puisque

$$b_T \cdot S^\lambda = \mathbb{C}v_T \neq 0.$$

En revanche, d'après (5b), le même élément b_T agit trivialement sur $S^{\lambda'}$, car $b_T \cdot S^{\lambda'} = 0$. Un isomorphisme de $\mathcal{A}$ -modules ne peut pas transformer une action non nulle d'un élément de $\mathcal{A}$ en une action nulle. C'est une contradiction. Donc

$$S^\lambda \not\simeq S^{\lambda'}.$$

Maintenant, montrons que S^λ est irréductible. D'après le théorème 6.9,

On a S^λ est irréductible $\Leftrightarrow S^\lambda$ est indécomposable. Supposons que $S^\lambda = V \oplus W$, alors

$$\mathbb{C} \cdot v_T = b_T \cdot S^\lambda = b_T \cdot V \oplus b_T \cdot W$$

Si on a $v_T \in V$, alors $b_T \cdot V = S^\lambda$.

Théorème 4.15. *Pour toute partition λ de n , le module de Specht S^λ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$. De plus, toute représentation irréductible complexe de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à un unique module S^λ , où λ parcourt l'ensemble des partitions de n .*

Démonstration. On a construit, pour chaque partition λ de n , un module de Specht S^λ , et l'on sait que chacun de ces modules est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$.

Il reste à montrer que l'on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, à isomorphisme près. Or les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont paramétrées par les partitions de n , par la décomposition des permutations en cycles. Ainsi, le nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ est égal au nombre de partitions de n .

D'autre part, pour un groupe fini, le nombre de représentations irréductibles complexes, à isomorphisme près, est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe. Il y a donc exactement autant de représentations irréductibles complexes de $\mathfrak{S}_n$ que de partitions de n .

Comme les modules S^λ , lorsque λ parcourt les partitions de n , fournissent déjà une famille de représentations irréductibles indexée par les partitions de n , cette famille est l'ensemble de toutes les représentations irréductibles complexes de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi, toute représentation irréductible complexe de $\mathfrak{S}_n$ est isomorphe à l'un des S^λ .

Enfin, l'unicité de λ découle du fait que deux modules de Specht S^λ et S^μ , avec $\lambda \neq \mu$, ne sont pas isomorphes, puisqu'ils correspondent à deux éléments distincts de la

liste complète des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles. Cela conclut la preuve. $\square$

Lemme 4.16. *Soit*

$$\vartheta : M^\lambda \longrightarrow M^{\lambda'}$$

un homomorphisme de représentations de $\mathfrak{S}_n$. Si S^λ n'est pas contenu dans le noyau de ϑ , alors

$$\lambda' \leq \lambda.$$

Démonstration. Soit T une numérotation de λ . Comme v_T n'appartient pas au noyau de ϑ , on a

$$b_T \cdot \vartheta(\{T\}) = \vartheta(v_T) \neq 0.$$

Par conséquent, il existe une numérotation T' de λ' telle que

$$b_T \cdot \{T'\} \neq 0.$$

Si $\lambda \neq \lambda'$ et si λ ne domine pas λ' , alors on est dans le cas (i) du lemme 3.1, ce qui contredit le lemme 3.9. $\square$

Corollaire 4.17. *Il existe des entiers naturels $k_{\nu\lambda}$, pour $\nu \triangleright \lambda$, tels que*

$$M^\lambda \simeq S^\lambda \oplus \bigoplus_{\nu \triangleright \lambda} (S^\nu)^{\oplus k_{\nu\lambda}}.$$

Démonstration. Pour chaque ν , notons $k_{\nu\lambda}$ le nombre de fois où la représentation irréductible S^ν apparaît dans la décomposition de M^λ . Pour voir que $k_{\lambda\lambda} = 1$, on prend une numérotation quelconque T de λ et on utilise l'équation (5a).

Comme chaque S^ν apparaît dans M^ν , il existe une projection

$$M^\nu \longrightarrow S^\nu.$$

Supposons que S^ν apparaisse aussi dans la décomposition de M^λ . Alors la projection de M^ν sur S^ν , suivie d'un plongement de S^ν dans M^λ , est un homomorphisme

$$\vartheta : M^\nu \longrightarrow M^\lambda$$

dont le noyau ne contient pas S^ν . Le lemme 3.14 implique alors

$$\lambda \leq \nu.$$

$\square$

Remarque 4.18. L'idée derrière le lemme est pour que

$$b_T \{T'\} \neq 0,$$

il faut que deux entiers situés dans une même colonne de T ne soient jamais situés dans une même ligne de T' . Sinon, la transposition de ces deux entiers appartient au groupe des colonnes de T , donc agit avec un signe -1 dans b_T , mais elle fixe le tabloïde $\{T'\}$. On obtient comme dans le lemme 3.9

$$b_T \{T'\} = -(b_T \{T'\}),$$

d'où

$$b_T \{T'\} = 0.$$

Ainsi, les colonnes de T doivent être distribuées dans les lignes de T' sans répétition. L'ordre de dominance mesure exactement la possibilité d'une telle distribution : lorsque $\nu \triangleright \lambda$, la forme ν est assez dominante pour permettre cette disposition. Dans le lemme, on utilise surtout la réciproque négative : sans la dominance, alors le terme correspondant est nul.

Proposition 4.19. *Les éléments v_T , lorsque T parcourt l'ensemble des tableaux standards de forme λ , forment une base de S^λ .*

Démonstration. L'élément v_T est une combinaison linéaire du tabloïde $\{T\}$, avec coefficient 1, et d'éléments $\{q \cdot T\}$, pour $q \in C(T)$, avec des coefficients égaux à ± 1 . Remarquons que, lorsque T est un tableau standard, on a $q \cdot T < T$, pour tout élément non trivial $q \in C(T)$.

Il en résulte que les éléments v_T sont linéairement indépendants. En effet, considérons une relation linéaire

$$\sum_T x_T v_T = 0,$$

où la somme porte sur les tableaux standards T de forme λ . Supposons qu'il existe un coefficient non nul, et choisissons T maximal parmi les tableaux tels que $x_T \neq 0$.

Dans le développement de v_T , le tabloïde $\{T\}$ apparaît avec coefficient 1, tandis que tous les autres termes sont de la forme $\{q \cdot T\}$, avec $q \cdot T < T$. Par maximalité de T , le coefficient de $\{T\}$ dans la relation précédente ne peut donc pas être annulé par les autres termes. On obtient alors $x_T = 0$, ce qui est une contradiction. Ainsi les éléments v_T sont linéairement indépendants.

En particulier, on obtient $\dim S^\lambda \geq f^\lambda$, où f^λ désigne le nombre de tableaux standards de forme λ .

On utilise le théorème 6.29 que la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini est égale à l'ordre du groupe. Dans le cas de $\mathfrak{S}_n$, on a donc

$$n! = \sum_{\lambda} (\dim S^\lambda)^2 \geq \sum_{\lambda} (f^\lambda)^2 = n!,$$

rappelons que la dernière égalité vient de la proposition 2.5, grâce à la correspondance bijective entre S_n et l'ensemble des paires (P, Q) , où P et Q sont les tableaux standards.

Il s'ensuit que toutes les inégalités précédentes sont des égalités. En particulier,

$$\dim S^\lambda = f^\lambda$$

pour toute partition λ de n .

Or les éléments v_T , lorsque T parcourt les tableaux standards de forme λ , sont linéairement indépendants et sont au nombre de f^λ . Comme

$$f^\lambda = \dim S^\lambda,$$

ils forment donc une base de S^λ . □

Exemple 4.20 (Les modules de Specht irréductibles de S_3). Les partitions de 3 sont

$$(3), \quad (2, 1), \quad (1, 1, 1).$$

Les modules de Specht associés sont donc

$$S^{(3)}, \quad S^{(2,1)}, \quad S^{(1,1,1)}.$$

Nous les décrivons explicitement à l'aide des polytabloïdes.

1. Le module de Specht $S^{(3)}$.

Il n'existe qu'un seul tableau standard de forme (3) :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Ainsi

$$S^{(3)} = \mathbb{C}v_T$$

est de dimension 1.

Comme le diagramme n'a qu'une seule ligne, toutes les permutations des éléments de cette ligne donnent le même tabloïde. Par conséquent, pour tout $\sigma \in S_3$, on a

$$\sigma v_T = v_{\sigma T} = v_T.$$

Donc $S^{(3)}$ est la représentation triviale :

$$S^{(3)} \cong \mathbf{1}.$$

Comme ce module est de dimension 1, il est irréductible.

2. Le module de Specht $S^{(1,1,1)}$.

Il n'existe qu'un seul tableau standard de forme $(1, 1, 1)$:

$$T = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

Ainsi

$$S^{(1,1,1)} = \mathbb{C}v_T$$

est également de dimension 1.

Comme le diagramme n'a qu'une seule colonne, le polytabloïde est antisymétrique par rapport aux permutations des éléments de cette colonne. Par conséquent, pour tout $\sigma \in S_3$, on a

$$\sigma v_T = v_{\sigma T} = \text{sgn}(\sigma)v_T.$$

Donc

$$S^{(1,1,1)} \cong \text{sgn}.$$

Comme ce module est de dimension 1, il est irréductible.

3. Le module de Specht $S^{(2,1)}$.

Il y a exactement deux tableaux standards de forme $(2, 1)$:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}.$$

On pose

$$v_1 := v_{T_1}, \quad v_2 := v_{T_2}.$$

Alors

$$S^{(2,1)} = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2.$$

Nous utilisons la notation suivante pour les tabloïdes :

$$\{12|3\}, \quad \{13|2\}, \quad \{23|1\}.$$

Les polytabloïdes associés à T_1 et T_2 sont

$$v_1 = v_{T_1} = \{12|3\} - \{23|1\},$$

et

$$v_2 = v_{T_2} = \{13|2\} - \{23|1\}.$$

Le groupe S_3 est engendré par les transpositions

$$s_1 = (12), \quad s_2 = (23).$$

Nous calculons donc leur action sur la base (v_1, v_2) .

Pour (12) , on a

$$(12)\{12|3\} = \{12|3\},$$

$$(12)\{13|2\} = \{23|1\},$$

et

$$(12)\{23|1\} = \{13|2\}.$$

Ainsi

$$(12)v_1 = (12)(\{12|3\} - \{23|1\}) = \{12|3\} - \{13|2\}.$$

Or

$$v_1 - v_2 = (\{12|3\} - \{23|1\}) - (\{13|2\} - \{23|1\}) = \{12|3\} - \{13|2\}.$$

Donc

$$(12)v_1 = v_1 - v_2.$$

De même,

$$(12)v_2 = (12)(\{13|2\} - \{23|1\}) = \{23|1\} - \{13|2\} = -v_2.$$

Ainsi

$$(12) : \begin{cases} v_1 \mapsto v_1 - v_2, \\ v_2 \mapsto -v_2. \end{cases}$$

Dans la base (v_1, v_2) , la matrice de (12) est donc

$$[(12)]_{(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour (23) , on a

$$(23)\{12|3\} = \{13|2\},$$

$$(23)\{13|2\} = \{12|3\},$$

et

$$(23)\{23|1\} = \{23|1\}.$$

Donc

$$(23)v_1 = (23)(\{12|3\} - \{23|1\}) = \{13|2\} - \{23|1\} = v_2,$$

et

$$(23)v_2 = (23)(\{13|2\} - \{23|1\}) = \{12|3\} - \{23|1\} = v_1.$$

Ainsi

$$(23) : \begin{cases} v_1 \mapsto v_2, \\ v_2 \mapsto v_1. \end{cases}$$

Dans la base (v_1, v_2) , la matrice de (23) est donc

$$[(23)]_{(v_1, v_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons maintenant que $S^{(2,1)}$ est irréductible. Comme

$$\dim S^{(2,1)} = 2,$$

il suffit de montrer qu'il ne contient aucun sous-espace de dimension 1 stable par l'action de S_3 .

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un sous-espace stable de dimension 1 :

$$L = \mathbb{C}w \subset S^{(2,1)}.$$

Comme L est stable par (23) , le vecteur w doit être un vecteur propre de l'opérateur (23) .

Or (23) agit par

$$(23)v_1 = v_2, \quad (23)v_2 = v_1.$$

Ses vecteurs propres sont donc, à multiplication par un scalaire près,

$$v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad v_1 - v_2,$$

de valeurs propres respectives 1 et -1 .

Par conséquent, si un tel sous-espace stable existe, il doit être égal à

$$\mathbb{C}(v_1 + v_2)$$

ou à

$$\mathbb{C}(v_1 - v_2).$$

Vérifions qu'aucune de ces deux droites n'est stable par (12). On a

$$(12)(v_1 + v_2) = (12)v_1 + (12)v_2 = (v_1 - v_2) + (-v_2) = v_1 - 2v_2.$$

Ce vecteur n'est pas un multiple scalaire de $v_1 + v_2$. Donc $\mathbb{C}(v_1 + v_2)$ n'est pas stable par S_3 .

De même,

$$(12)(v_1 - v_2) = (12)v_1 - (12)v_2 = (v_1 - v_2) - (-v_2) = v_1.$$

Ce vecteur n'est pas un multiple scalaire de $v_1 - v_2$. Donc $\mathbb{C}(v_1 - v_2)$ n'est pas stable par S_3 non plus.

Ainsi $S^{(2,1)}$ ne contient aucun sous-module non nul propre. Par conséquent, $S^{(2,1)}$ est irréductible.

Nous avons donc obtenu les trois modules de Specht irréductibles de S_3 :

$$S^{(3)} \cong \mathbf{1}, \quad S^{(2,1)}, \quad S^{(1,1,1)} \cong \text{sgn}.$$

Leurs dimensions sont

$$\dim S^{(3)} = 1, \quad \dim S^{(2,1)} = 2, \quad \dim S^{(1,1,1)} = 1.$$

On retrouve ainsi l'identité

$$1^2 + 2^2 + 1^2 = 6 = |S_3|,$$

5. CONCLUSION ET REMERCIEMENTS

Durant ce projet, sous la direction du Monsieur Thomas Gerber, j'ai acquis des connaissances fondamentales sur la correspondance RSK, la théorie générale des représentations, une méthode intéressante pour construire les représentations irréductibles de S_n , et comprendre les identités de Cauchy sur les fonctions symétriques du point de vue algébrique et combinatoire.

Donc je tiens à exprimer ma profonde gratitude à professeur Thomas Gerber pour son enseignement patient et son guidage précieux, ainsi qu'à professeur Guillaume Aubrun pour cette opportunité.

J'espère que mes compétences linguistiques limitées n'affectent pas votre compréhension du problème.

6. APPENDICE

6.1. Introduction à la théorie des représentations. Soient G un groupe, et K un corps commutatif.

Définition 6.1. Une *représentation linéaire* de G est la donnée d'un K -espace vectoriel V et d'un morphisme de groupes

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_K(V).$$

Supposons G fini. Soit V un K -espace vectoriel de dimension $|G|$, et soit $\{e_g \mid g \in G\}$ une base de V . Soit

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

définie par

$$\rho(g)(e_h) = e_{gh}$$

pour tous $g, h \in G$, et étendue par K -linéarité. L'application ρ est un morphisme de groupes appelé *représentation régulière* de G .

On commet souvent l'abus raisonnable de désigner une représentation (ρ, V) simplement par ρ , et parfois celui moins défendable de la désigner par V . On note alors simplement $g \cdot v$.

pour ce qu'on devrait noter $\rho(g)(v)$, c.-à-d. l'image d'un vecteur v de V sous l'action (via ρ) d'un élément g de G .

On a donc

$$g(\lambda v + v') = \lambda gv + gv', \quad (gg')v = g(g'v), \quad 1_G v = v$$

pour tout $g, g' \in G$, $v, v' \in V$, $\lambda \in K$.

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[S_n]$ l'algèbre de groupe de S_n . Par définition, $\mathcal{A}$ est l'espace vectoriel complexe ayant pour base les éléments de S_n . Ses éléments sont donc les combinaisons linéaires finies

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \sigma, \quad x_\sigma \in \mathbb{C},$$

et la multiplication est déterminée par la composition dans S_n , puis étendue par bi-linéarité.

Une représentation complexe de S_n est équivalente à la donnée d'un $\mathcal{A}$ -module à gauche. En effet, si

$$\rho : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

est une représentation, alors l'action de S_n sur V s'étend linéairement en une action de $\mathcal{A}$:

$$\left(\sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \sigma \right) \cdot v = \sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \rho(\sigma)(v).$$

Cette formule définit une structure de $\mathcal{A}$ -module à gauche sur V . Réciproquement, une structure de $\mathcal{A}$ -module à gauche donne, par restriction aux éléments de la base $S_n \subset \mathcal{A}$, une représentation de S_n .

Soient

$$\alpha = \sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \sigma, \quad \beta = \sum_{\tau \in S_n} y_\tau \tau$$

deux éléments de $\mathcal{A}$, et soient $v, w \in V$.

Tout d'abord, l'action est linéaire en l'élément de $\mathcal{A}$. En effet,

$$(\alpha + \beta) \cdot v = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (x_\sigma + y_\sigma) \sigma \right) \cdot v = \sum_{\sigma \in S_n} (x_\sigma + y_\sigma) \rho(\sigma)(v),$$

donc

$$(\alpha + \beta) \cdot v = \sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \rho(\sigma)(v) + \sum_{\sigma \in S_n} y_\sigma \rho(\sigma)(v) = \alpha \cdot v + \beta \cdot v.$$

et on a

$$\alpha\beta = \left(\sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in S_n} y_\tau \tau \right) = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} x_\sigma y_\tau \sigma\tau.$$

Donc

$$(\alpha\beta) \cdot v = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} x_\sigma y_\tau \rho(\sigma\tau)(v).$$

Comme ρ est un morphisme,

$$\rho(\sigma\tau) = \rho(\sigma)\rho(\tau).$$

Par conséquent,

$$(\alpha\beta) \cdot v = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} x_\sigma y_\tau \rho(\sigma)(\rho(\tau)(v)).$$

D'autre part,

$$\alpha \cdot (\beta \cdot v) = \sum_{\sigma \in S_n} x_\sigma \rho(\sigma) \left(\sum_{\tau \in S_n} y_\tau \rho(\tau)(v) \right) = \sum_{\sigma, \tau \in S_n} x_\sigma y_\tau \rho(\sigma)(\rho(\tau)(v)).$$

Ainsi,

$$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v).$$

Définition 6.2 (Degré d'une représentation). Le *degré* d'une représentation (ρ, V) de G est la dimension sur K de l'espace vectoriel sous-jacent V :

$$\deg(\rho) = \dim_K(V).$$

Définition 6.3 (Vecteur fixe). Un *vecteur fixe* pour l'action de G sur V est un élément $v \in V$ tel que

$$gv = v \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Le vecteur nul $0 \in V$ est toujours fixe par G .

On note

$$V^G = \{ v \in V \mid gv = v, \forall g \in G \}$$

l'ensemble des vecteurs fixes sous G . C'est un sous- K -espace vectoriel de V .

Définition 6.4 (Sous-représentation). Une *sous-représentation* de (ρ, V) est un sous- K -espace vectoriel $W \subset V$ stable sous l'action de G , c'est-à-dire tel que

$$gv \in W \quad \text{pour tout } v \in W, g \in G.$$

On la note parfois $(\rho, W) \subset (\rho, V)$.

Définition 6.5 (Représentation quotient). Soit W une sous-représentation de V . Alors l'espace quotient V/W est naturellement muni d'une structure de représentation de G , appelée *représentation quotient*.

Pour toute classe $v + W$, on pose

$$g(v + W) := gv + W,$$

ce qui ne dépend pas du choix du représentant v , puisque W est stable.

Définition 6.6 (Représentation irréductible). On dit qu'une représentation (ρ, V) est *irréductible* si elle n'admet pas de sous-représentation propre, c'est-à-dire distincte de $\{0\}$ et de V .

Définition 6.7 (Somme directe). Si V et W sont deux représentations de G , leur somme directe est la représentation $V \oplus W$ définie par

$$g \cdot (v \oplus w) = gv \oplus gw.$$

Définition 6.8. On dit qu'une représentation (ρ, V) est *indécomposable* si elle n'est pas somme directe de deux sous-représentations propres (i.e. distinctes de $\{0\}$ et de V). Sinon elle est dite décomposable.

Théorème 6.9 (Théorème de Maschke). *Soit G un groupe fini et K un corps de caractéristique ne divisant pas $|G|$. Soit V une représentation et W une sous-représentation non nulle. Alors il existe une sous-représentation W' de V telle que*

$$V = W \oplus W'.$$

Démonstration. Soit W_0 un supplémentaire de W dans V , c'est-à-dire

$$V = W \oplus W_0.$$

Soit p le projecteur de V sur W correspondant à cette décomposition, et considérons

$$p' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) p \rho(g)^{-1}.$$

Puisque p envoie V sur W et que $\rho(g)$ conserve W , on déduit que p' envoie V sur W . De plus, pour tout $w \in W$, on a

$$\begin{aligned} p'(w) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) p \rho(g)^{-1}(w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \rho(g)^{-1}(w) \quad \text{car } \rho(g)^{-1}(w) \in W \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w \\ &= w \quad \text{car } \text{char}(K) \nmid |G|. \end{aligned}$$

Ainsi, p' est un projecteur de V sur W . En posant

$$W' = \ker p',$$

on obtient

$$V = W \oplus W'.$$

Il reste à montrer que W' est stable par G . Pour cela, montrons d'abord que p' commute avec l'action de G . Pour tout $h \in G$, on a

$$\begin{aligned} \rho(h) p' \rho(h)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h) \rho(g) p \rho(g)^{-1} \rho(h)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) p \rho(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} \rho(k) p \rho(k)^{-1} \\ &= p', \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\rho(h)p' = p'\rho(h)$$

pour tout $h \in G$.

Maintenant, si $x \in W'$ et $g \in G$, alors

$$p'(x) = 0.$$

Donc, comme p' commute avec $\rho(g)$, on obtient

$$p'(\rho(g)(x)) = \rho(g)p'(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\rho(g)(x) \in \ker p' = W'.$$

Par conséquent, W' est stable par G . On a donc trouvé un supplément G -stable de W , ce qui conclut la preuve. $\square$

Proposition 6.10 (Lemme de Schur). *Soient V et W deux représentations irréductibles d'un groupe G , et $\varphi : V \rightarrow W$ un G -morphisme non identiquement nul. Alors :*

- (1) φ est un isomorphisme.
- (2) Si de plus $V = W$ est de dimension finie, et si K est algébriquement clos, il existe un scalaire non nul λ tel que

$$\varphi = \lambda \text{id}_V.$$

Corollaire 6.11. *Soit G un groupe fini d'ordre inversible dans K .*

- (1) *Toute représentation indécomposable est irréductible.*
- (2) *Toute représentation ρ se décompose en une somme directe*

$$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$$

de représentations irréductibles.

Théorème 6.12. *Si G est abélien fini, toute représentation irréductible de G sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1.*

Théorème 6.13. *Soit G un groupe abélien fini, et prenons $K = \mathbb{C}$. Alors toute représentation irréductible de G est de dimension 1.*

Démonstration. Soit

$$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

une représentation irréductible de G . On peut voir V comme un $\mathbb{C}G$ -module en posant

$$g \cdot v = \rho(g)(v), \quad g \in G, v \in V.$$

Fixons $g \in G$. Il faut montrer que l'application linéaire

$$\rho(g) : V \longrightarrow V$$

est un morphisme de $\mathbb{C}G$ -modules. Il faut donc vérifier que, pour tout $h \in G$ et tout $v \in V$, on a

$$\rho(g)(h \cdot v) = h \cdot \rho(g)(v).$$

Or, par définition de l'action,

$$\rho(g)(h \cdot v) = \rho(g)\rho(h)(v) = \rho(gh)(v).$$

Comme G est abélien, on a $gh = hg$, donc

$$\rho(gh)(v) = \rho(hg)(v) = \rho(h)\rho(g)(v) = h \cdot \rho(g)(v).$$

Ainsi,

$$\rho(g)(h \cdot v) = h \cdot \rho(g)(v),$$

pour tous $h \in G$ et $v \in V$. Donc

$$\rho(g) \in \text{End}_{\mathbb{C}G}(V).$$

Comme V est irréductible, le lemme de Schur donne

$$\text{End}_{\mathbb{C}G}(V) = \mathbb{C} \text{Id}_V.$$

Il existe donc un scalaire $\lambda_g \in \mathbb{C}$ tel que

$$\rho(g) = \lambda_g \text{Id}_V.$$

Comme $g \in G$ était arbitraire, cela vaut pour tout $g \in G$.

Par conséquent, tout sous-espace vectoriel $W \subset V$ est stable par l'action de G . En effet, si $w \in W$, alors pour tout $g \in G$,

$$\rho(g)(w) = \lambda_g w \in W.$$

Ainsi tout sous-espace de V est un sous- $\mathbb{C}G$ -module.

Or V est irréductible, donc ses seuls sous- $\mathbb{C}G$ -modules sont 0 et V . Si $v \neq 0$, la droite $\mathbb{C}v$ est donc un sous-module non nul de V , d'où

$$\mathbb{C}v = V.$$

Ainsi

$$\dim_{\mathbb{C}} V = 1.$$

□

Définition 6.14. (1) Un A -module V est dit *semi-simple* si, pour tout sous-module W de V , il existe un sous-module W' de V tel que

$$V = W \oplus W'.$$

(2) L'algèbre A est dite *semi-simple* si le A -module régulier est semi-simple.

Lemme 6.15. Soit V un A -module semi-simple et W un sous-module de V . Alors W et V/W sont semi-simples.

Démonstration. Écrivons

$$V = W \oplus W',$$

où W' est un sous-module de V . Alors

$$V/W = (W \oplus W')/W \simeq W',$$

donc il suffit de démontrer l'assertion pour les sous-modules.

Soit donc U un sous-module de W . Alors U est aussi un sous-module de V , donc il existe un sous-module U' de V tel que

$$U \oplus U' = V.$$

On a alors

$$\begin{aligned} W &= V \cap W \\ &= (U \oplus U') \cap W \\ &= (U \cap W) \oplus (U' \cap W) \\ &= U \oplus (U' \cap W). \end{aligned}$$

Puisque $U' \cap W$ est un sous-module de W , on conclut que W est semi-simple. □

Théorème 6.16. Soit V un A -module. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) V est semi-simple ;
- (2) V est somme directe de sous-modules simples ;
- (3) V est somme de sous-modules simples.

Démonstration. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) se démontre exactement comme le corollaire 1.9. L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est triviale.

Montrons que (2) $\Rightarrow$ (1). Écrivons

$$V = \bigoplus_i V_i,$$

avec V_i simple, et soit $W \leq V$. Puisque V est de dimension finie, on peut choisir $U \leq V$ de dimension maximale tel que

$$U \cap W = \{0\}.$$

Supposons que

$$W + U \neq V.$$

Alors il existe $v \in V$ tel que

$$v \notin W + U.$$

On peut écrire

$$v = \sum_i v_i, \quad v_i \in V_i.$$

Il existe alors i tel que

$$v_i \notin W + U.$$

Donc

$$V_i \not\subseteq W + U.$$

On a alors

$$(W + U) \cap V_i = \{0\},$$

puisque V_i est simple. Cela implique

$$(U + V_i) \cap W = \{0\}.$$

Mais comme

$$U \subsetneq U + V_i \leq V,$$

ceci contredit la maximalité de U . Ainsi

$$W + U = V.$$

Comme $U \cap W = \{0\}$, on obtient

$$V = W \oplus U.$$

Donc tout sous-module W de V admet un supplémentaire, et par conséquent V est semi-simple. $\square$

Théorème 6.17. *Soit G un groupe fini et $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors tout FG -module non nul est complètement réductible.*

Démonstration. Soit V un FG -module non nul. On raisonne par récurrence sur $\dim V$.

Si $\dim V = 1$, le résultat est immédiat, car V est alors irréductible.

Supposons maintenant $\dim V > 1$. Si V est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que V soit réductible. Il existe alors un sous- FG -module U tel que

$$\{0\} \neq U \neq V.$$

Par le théorème de Maschke, il existe un sous- FG -module W tel que

$$V = U \oplus W.$$

Comme

$$\dim U < \dim V \quad \text{et} \quad \dim W < \dim V,$$

l'hypothèse de récurrence s'applique à U et à W . On peut donc écrire

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r, \quad W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

où chaque U_i et chaque W_j est un FG -module irréductible.

Par associativité de la somme directe, on obtient alors

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

ce qui montre que V est somme directe de FG -modules irréductibles.

Ainsi, tout FG -module non nul est complètement réductible. $\square$

Théorème 6.18. *L'algèbre A est semi-simple si et seulement si tout A -module est semi-simple.*

Démonstration. Si tout A -module est semi-simple, alors en particulier le A -module régulier est semi-simple, et A est semi-simple par définition.

Réciproquement, supposons A semi-simple, et soit V un A -module. Puisque V est supposé de dimension finie, il existe $v_1, \dots, v_m \in V$ tels que

$$V = \sum_{i=1}^m Av_i.$$

Grâce au théorème 5.16, il suffit de montrer que chaque Av_i est semi-simple. Fixons donc $i \in \{1, \dots, m\}$.

L'application

$$\varphi_i : {}_A A \longrightarrow Av_i, \quad a \longmapsto av_i$$

est un morphisme de A -modules surjectif. On a donc

$$Av_i \simeq {}_A A / \ker(\varphi_i).$$

Or A est semi-simple, donc le A -module régulier ${}_A A$ est semi-simple. Par le lemme 5.15, tout quotient d'un module semi-simple est semi-simple. Ainsi ${}_A A / \ker(\varphi_i)$ est semi-simple, et donc Av_i est semi-simple.

Par conséquent, V est somme de sous-modules semi-simples, donc somme de sous-modules simples. D'après le théorème 5.16, V est semi-simple. $\square$

Lemme 6.19. (1) *Soit V un A -module semi-simple et soit*

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$$

une décomposition de V en somme directe de sous-modules simples. Alors, pour tout A -module simple S isomorphe à un sous-module ou à un module quotient de V , il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$S \simeq V_i.$$

(2) *Si A est semi-simple, alors il n'y a qu'un nombre fini de A -modules simples, à isomorphisme près.*

Démonstration. (1) Soit $S' \leq V$ avec $S' \simeq S$. Alors il existe $T \leq V$ tel que

$$V = T \oplus S',$$

et on a alors

$$S \simeq S' \simeq V/T.$$

Il suffit donc de prouver l'assertion pour les modules quotients.

Soit donc $T \leq V$ tel que

$$S \simeq V/T.$$

Puisque S est simple, T est maximal. Soit $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$V_i \not\subseteq T.$$

On a

$$V = V_i + T$$

car T est maximal, et

$$V_i \cap T = \{0\}$$

car V_i est simple. Il suit que

$$V = V_i \oplus T,$$

et donc

$$S \simeq V/T \simeq V_i.$$

- (2) C'est une conséquence directe de (1) appliqué au A -module ${}_A A$, puisqu'on a vu dans la preuve du théorème 6.18 que tout A -module simple S est isomorphe à un quotient de ${}_A A$. En effet, si $s \in S \setminus \{0\}$, la surjection

$$\varphi : {}_A A \longrightarrow S, \quad a \longmapsto as$$

donne

$$S \simeq {}_A A / \ker \varphi.$$

Comme ${}_A A$ est semi-simple, il se décompose en somme directe finie de sous-modules simples. Par (1), tout A -module simple est donc isomorphe à l'un des facteurs simples apparaissant dans une telle décomposition de ${}_A A$. Il n'y en a qu'un nombre fini, ce qui conclut. □

Exemple 6.20. Soit

$$G = D_6 = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

On considère maintenant $\mathbb{C}G$ comme un $\mathbb{C}G$ -module à gauche, c'est-à-dire que l'action est donnée par la multiplication à gauche.

Posons

$$\omega = e^{2\pi i/3}.$$

On définit

$$v_0 = 1 + a + a^2,$$

$$v_1 = 1 + \omega^2 a + \omega a^2,$$

$$v_2 = 1 + \omega a + \omega^2 a^2,$$

et

$$w_i = bv_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Lemme 6.21. *Pour $i = 0, 1, 2$, on a*

$$av_i = \omega^i v_i.$$

On étudie maintenant l'action de a et de b sur les éléments $w_i = bv_i$.

Puisque

$$b^{-1}ab = a^{-1}$$

et $b^{-1} = b$, on a aussi

$$ab = ba^{-1}.$$

Alors

$$aw_i = a(bv_i) = abv_i = ba^{-1}v_i.$$

Or

$$a^{-1}v_i = \omega^{-i}v_i.$$

Donc

$$aw_i = \omega^{-i}bv_i = \omega^{-i}w_i.$$

Ainsi,

$$aw_i = \omega^{-i}w_i.$$

D'autre part, comme $b^2 = 1$, on a

$$bv_i = w_i$$

et

$$bw_i = b(bv_i) = v_i.$$

On obtient donc les relations

$$av_i = \omega^i v_i, \quad aw_i = \omega^{-i} w_i,$$

et

$$bv_i = w_i, \quad bw_i = v_i.$$

En particulier, les sous-espaces

$$\text{span}(v_0, w_0), \quad \text{span}(v_1, w_1), \quad \text{span}(v_2, w_2)$$

sont stables par l'action de a et par l'action de b . Ce sont donc des $\mathbb{C}G$ -sous-modules de $\mathbb{C}G$.

Considérons d'abord

$$\text{span}(v_0, w_0).$$

Sur cet espace, l'élément a agit trivialement :

$$av_0 = v_0, \quad aw_0 = w_0.$$

L'élément b , lui, échange v_0 et w_0 :

$$bv_0 = w_0, \quad bw_0 = v_0.$$

Donc

$$b(v_0 + w_0) = v_0 + w_0$$

et

$$b(v_0 - w_0) = -(v_0 - w_0).$$

On pose alors

$$U_1 = \mathbb{C}(v_0 + w_0),$$

et

$$U_2 = \mathbb{C}(v_0 - w_0).$$

Sur U_1 , on a

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1.$$

C'est donc la représentation triviale. Sur U_2 , on a

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto -1.$$

Ainsi,

$$\text{span}(v_0, w_0) = U_1 \oplus U_2.$$

Considérons maintenant

$$U_3 = \text{span}(v_1, w_1).$$

On a

$$av_1 = \omega v_1, \quad aw_1 = \omega^{-1}w_1,$$

et

$$bv_1 = w_1, \quad bw_1 = v_1.$$

Dans la base (v_1, w_1) , les matrices de a et b sont donc

$$\rho_3(a) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 6.22. *Le $\mathbb{C}G$ -module U_3 est irréductible.*

Démonstration. Supposons que U_3 admette un sous-module non nul propre. Comme

$$\dim U_3 = 2,$$

ce sous-module serait nécessairement de dimension 1.

Supposons que $L \subset U_3$ est stable par G . En particulier, L est stable par a . Or, dans la base (v_1, w_1) , l'action de a est diagonale avec deux valeurs propres distinctes :

$$\omega \quad \text{et} \quad \omega^{-1}.$$

Les seules espaces stables par a sont donc

$$\mathbb{C}v_1 \quad \text{et} \quad \mathbb{C}w_1.$$

Mais aucun de ces deux espaces n'est stable par b , puisque

$$bv_1 = w_1, \quad bw_1 = v_1.$$

Donc U_3 ne possède aucun sous-module non nul propre. Il est donc irréductible. $\square$

De même,

$$U_4 = \text{span}(v_2, w_2)$$

est irréductible. En effet, dans la base (v_2, w_2) , on a

$$\rho_4(a) = \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \quad \rho_4(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, les six éléments

$$v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2$$

forment une base de $\mathbb{C}G$. On obtient donc

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4.$$

Les dimensions sont

$$\dim U_1 = 1, \quad \dim U_2 = 1, \quad \dim U_3 = 2, \quad \dim U_4 = 2,$$

et

$$1 + 1 + 2 + 2 = 6 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G.$$

De plus,

$$U_3 \simeq U_4.$$

Par exemple, l'application linéaire définie par

$$v_1 \longmapsto w_2, \quad w_1 \longmapsto v_2$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}G$ -modules.

Ainsi, à isomorphisme près, les représentations irréductibles de D_6 sur $\mathbb{C}$ sont

$$\begin{aligned}\rho_1(a) &= 1, & \rho_1(b) &= 1, \\ \rho_2(a) &= 1, & \rho_2(b) &= -1,\end{aligned}$$

et

$$\rho_3(a) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.23. *Supposons que V et W soient des $\mathbb{C}G$ -modules irréductibles. Alors*

$$\dim(\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \begin{cases} 1, & \text{si } V \simeq W, \\ 0, & \text{si } V \not\simeq W. \end{cases}$$

Proposition 6.24. *Soient V et W deux $\mathbb{C}G$ -modules, et supposons que*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W) \neq \{0\}.$$

Alors V et W ont un facteur de composition commun.

Démonstration. Soit

$$\vartheta \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}G}(V, W), \quad \vartheta \neq 0.$$

Par le théorème de Maschke, il existe un sous- $\mathbb{C}G$ -module non nul U de V tel que

$$V = \operatorname{Ker}(\vartheta) \oplus U.$$

Choisissons un sous- $\mathbb{C}G$ -module irréductible X de U .

Comme $X \cap \operatorname{Ker}(\vartheta) = \{0\}$, la restriction

$$\vartheta|_X : X \rightarrow W$$

est non nulle. Son image $\vartheta(X)$ est donc un sous- $\mathbb{C}G$ -module non nul de W . De plus, comme X est irréductible et que $\vartheta|_X$ est un $\mathbb{C}G$ -homomorphisme non nul, le lemme de Schur implique que

$$\vartheta(X) \simeq X.$$

Ainsi X est un facteur de composition de V et de W . Par conséquent, V et W ont un facteur de composition commun. $\square$

Théorème 6.25 (Artin–Wedderburn). *Soit K un corps algébriquement clos et A une K -algèbre semi-simple de dimension finie. Soient $S_1, \dots, S_r$ des représentants des classes d'isomorphisme des A -modules simples. Pour tout $i = 1, \dots, r$, notons*

$$m_i = \dim_K S_i.$$

On a

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^r K^{m_i \times m_i}.$$

Démonstration. Puisque A est semi-simple, on peut écrire

$${}_A A = V_1 \oplus \dots \oplus V_t,$$

où chaque V_i est un A -module simple. Considérons l'algèbre $\operatorname{End}_A({}_A A)$, elle est isomorphe à l'algèbre des matrices de taille $t \times t$ dont le coefficient en position (i, j) est un élément de

$$\operatorname{Hom}_A(V_i, V_j),$$

munie de la multiplication matricielle usuelle.

Mais, comme les V_i sont simples, on peut appliquer le lemme de Schur,

$$\operatorname{Hom}_A(V_i, V_j) = \{0\} \quad \text{si } V_i \not\simeq V_j,$$

et que

$$\text{Hom}_A(V_i, V_i) = \text{End}_A(V_i) \simeq K.$$

Regroupons donc les V_i qui sont isomorphes deux à deux dans la décomposition de ${}_A A$. En posant, pour tout $j = 1, \dots, r$,

$$A_j = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq t \\ V_i \simeq S_j}} V_i,$$

on obtient

$${}_A A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r \simeq S_1^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus S_r^{\oplus n_r},$$

où n_j est le nombre de V_i isomorphes à S_j . On obtient donc

$$\begin{aligned} \text{End}_A({}_A A) &\simeq \text{End}_A(S_1^{\oplus n_1}) \oplus \dots \oplus \text{End}_A(S_r^{\oplus n_r}) \\ &\simeq K^{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus K^{n_r \times n_r}. \end{aligned}$$

Maintenant, A est isomorphe, en tant que K -algèbre, à $\text{End}_A({}_A A)^\circ$, l'algèbre opposée à $\text{End}_A({}_A A)$, où la multiplication est définie par

$$a * b = ba.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A &\simeq \text{End}_A({}_A A)^\circ \\ &\simeq (K^{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus K^{n_r \times n_r})^\circ \\ &\simeq (K^{n_1 \times n_1})^\circ \oplus \dots \oplus (K^{n_r \times n_r})^\circ \\ &\simeq K^{n_1 \times n_1} \oplus \dots \oplus K^{n_r \times n_r}, \end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant donné par la transposition matricielle.

Il reste à montrer que

$$n_i = m_i$$

pour tout $i = 1, \dots, r$. Par construction, l'algèbre $K^{n_i \times n_i}$ agit par zéro sur $S_j^{\oplus n_j}$ si et seulement si $j \neq i$. On a donc un isomorphisme de A -modules

$$K^{n_i \times n_i} \simeq S_i^{\oplus n_i},$$

puisque les deux sont isomorphes au quotient de ${}_A A$ par les éléments annihilés par $K^{n_i \times n_i}$.

Ainsi, on a

$$n_i^2 = \dim_K K^{n_i \times n_i} = \dim_K S_i^{\oplus n_i} = n_i \dim_K S_i = n_i m_i.$$

Comme $n_i \neq 0$, on obtient

$$n_i = m_i.$$

Finalement,

$$A \simeq K^{m_1 \times m_1} \oplus \dots \oplus K^{m_r \times m_r} = \bigoplus_{i=1}^r K^{m_i \times m_i}.$$

□

Pour tout $a \in A$, considérons l'application

$$R_a : {}_A A \longrightarrow {}_A A, \quad x \longmapsto xa.$$

C'est un morphisme de A -modules à gauche. En effet, pour tous $b, x \in A$, on a

$$R_a(bx) = (bx)a = b(xa) = bR_a(x).$$

On obtient donc une application

$$\Phi : A \longrightarrow \text{End}_A({}_A A), \quad a \longmapsto R_a.$$

Cette application est bijective. En effet, si $f \in \text{End}_A({}_A A)$, alors, pour tout $x \in A$,

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1).$$

Ainsi $f = R_{f(1)}$. Donc tout endomorphisme A -linéaire de ${}_A A$ est une multiplication à droite.

Cependant, la composition des multiplications à droite renverse l'ordre : pour tous $a, b \in A$,

$$R_a \circ R_b(x) = R_a(xb) = (xb)a = x(ba) = R_{ba}(x).$$

Ainsi

$$R_a \circ R_b = R_{ba}.$$

Par conséquent, l'application $a \mapsto R_a$ n'est pas un morphisme d'algèbres de A vers $\text{End}_A({}_A A)$, mais un morphisme d'algèbres de A vers l'algèbre opposée $\text{End}_A({}_A A)^\circ$. Autrement dit, on a un isomorphisme de K -algèbres

$$A \simeq \text{End}_A({}_A A)^\circ.$$

Corollaire 6.26. *Avec les notations du théorème précédent, on a :*

(1)

$$\dim_K(A) = \sum_{i=1}^r m_i^2.$$

(2)

$$\dim_K(Z(A)) = r,$$

où

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az, \forall a \in A\}$$

est le centre de A .

Démonstration. Le théorème 5.22 implique directement (1). En effet, on a

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^r K^{m_i \times m_i},$$

donc

$$\dim_K(A) = \sum_{i=1}^r \dim_K K^{m_i \times m_i} = \sum_{i=1}^r m_i^2.$$

Pour (2), on utilise le fait que

$$Z(K^{k \times k}) = \{\lambda I_k \mid \lambda \in K\} \simeq K.$$

Ainsi,

$$Z(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^r Z(K^{m_i \times m_i}) \simeq \bigoplus_{i=1}^r K.$$

Par conséquent,

$$\dim_K(Z(A)) = r.$$

□

Proposition 6.27. *Si U est un CG -module, alors*

$$\dim(\text{Hom}_{CG}(CG, U)) = \dim U.$$

Théorème 6.28. *Supposons que*

$$CG = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

somme directe de sous- CG -modules irréductibles. Si U est un CG -module irréductible quelconque, alors le nombre de CG -modules U_i tels que

$$U_i \simeq U$$

est égal à $\dim U$.

Théorème 6.29. *Soient $V_1, \dots, V_k$ un système complet de CG -modules irréductibles deux à deux non isomorphes. Alors*

$$\sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Démonstration. Écrivons

$$CG = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

somme directe de sous- CG -modules irréductibles. Pour $1 \leq i \leq k$, posons

$$d_i = \dim V_i.$$

Or on a pour chaque i , le nombre de CG -modules U_j tels que

$$U_j \simeq V_i$$

est égal à d_i .

On en déduit que

$$\dim CG = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r = \sum_{i=1}^k d_i \dim V_i = \sum_{i=1}^k d_i^2.$$

Or

$$\dim CG = |G|.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2 = |G|.$$

□

On peut aussi utiliser un autre outil caractere pour déduire cette égalité.

Définition 6.30 (Caractère d'une représentation). Soit

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

une représentation de G . Le caractère de ρ est la fonction

$$\chi_\rho = \chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$g \longmapsto \mathrm{Tr}(\rho(g)).$$

Autrement dit,

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)).$$

Remarque 6.31. Tout caractère

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

s'étend linéairement en une fonction

$$\widehat{\chi} : \mathbb{C}G \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Plus précisément, si

$$x = \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{C}G,$$

alors on pose

$$\widehat{\chi}(x) = \sum_{g \in G} a_g \chi(g).$$

Proposition 6.32. *Soit*

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

une représentation de G et χ son caractère. Alors

$$\chi(1) = \dim_K(V).$$

Lemme 6.33. *Pour tous $i, j = 1, \dots, r$, on a*

$$\widehat{\chi}_j(e_i) = \delta_{ij} \chi_j(1).$$

Corollaire 6.34. *Les caractères χ_i , $i = 1, \dots, r$, sont deux à deux distincts.*

Démonstration. Soient $i, j \in \{1, \dots, r\}$. Supposons que

$$\chi_i = \chi_j.$$

Alors leurs prolongements linéaires à $\mathbb{C}G$ sont aussi égaux :

$$\widehat{\chi}_i = \widehat{\chi}_j.$$

En particulier, en évaluant en e_i , on obtient

$$\widehat{\chi}_i(e_i) = \widehat{\chi}_j(e_i).$$

D'après le lemme précédent,

$$\widehat{\chi}_i(e_i) = \chi_i(1)$$

et

$$\widehat{\chi}_j(e_i) = \delta_{ij} \chi_j(1).$$

Or

$$\chi_i(1) = \dim_{\mathbb{C}}(S_i) > 0.$$

Donc

$$\chi_i(1) = \delta_{ij} \chi_j(1).$$

Si $i \neq j$, le membre de droite serait nul, ce qui est impossible. Ainsi

$$i = j.$$

□

Théorème 6.35. *On a*

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|.$$

Démonstration. On a

$$|G| = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G).$$

D'après la décomposition de l'algèbre de groupe en composantes simples, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G) = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{C}}(S_i)^2.$$

Or, pour tout $i = 1, \dots, r$,

$$\chi_{S_i}(1) = \dim_{\mathbb{C}}(S_i),$$

puisque $\chi_{S_i}(1)$ est la trace de l'identité de S_i . Donc

$$|G| = \sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{C}}(S_i)^2 = \sum_{i=1}^r \chi_{S_i}(1)^2.$$

Enfin, d'après le corollaire précédent, les caractères $\chi_{S_1}, \dots, \chi_{S_r}$ sont deux à deux distincts, et ils forment donc exactement l'ensemble $\text{Irr}(G)$. Ainsi,

$$|G| = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1)^2.$$

□

Théorème 6.36. *Le nombre de caractères irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G .*

Démonstration. Notons

$$C_1, \dots, C_s$$

les classes de conjugaison de G . Pour tout $i = 1, \dots, s$, posons

$$\widehat{C}_i = \sum_{x \in C_i} x \in \mathbb{C}G.$$

Nous allons montrer que $\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_s$ forment une base de $Z(\mathbb{C}G)$.

Tout d'abord, pour tout $g \in G$ et tout $i = 1, \dots, s$, on a

$$g\widehat{C}_i = g \left(\sum_{x \in C_i} x \right) = \left(\sum_{x \in C_i} gxg^{-1} \right) g.$$

Or, comme C_i est une classe de conjugaison, on a

$$\{gxg^{-1} \mid x \in C_i\} = C_i.$$

Donc

$$\left(\sum_{x \in C_i} gxg^{-1} \right) g = \left(\sum_{x \in C_i} x \right) g = \widehat{C}_i g.$$

Ainsi

$$g\widehat{C}_i = \widehat{C}_i g$$

pour tout $g \in G$, et donc

$$\widehat{C}_i \in Z(\mathbb{C}G).$$

Puisque les classes de conjugaison $C_1, \dots, C_s$ sont deux à deux disjointes, les éléments $\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_s$ sont linéairement indépendants.

Il reste à montrer qu'ils engendrent $Z(\mathbb{C}G)$. Soit

$$z = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}G).$$

Pour tout $h \in G$, on a

$$hzh^{-1} = z.$$

Or

$$hzh^{-1} = \sum_{g \in G} \lambda_g hgh^{-1}.$$

En comparant les coefficients dans la base G de $\mathbb{C}G$, on obtient

$$\lambda_g = \lambda_{hgh^{-1}}$$

pour tous $g, h \in G$. Autrement dit, le coefficient λ_g ne dépend que de la classe de conjugaison de g .

Ainsi, il existe des scalaires $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{C}$ tels que

$$z = \sum_{i=1}^s \mu_i \widehat{C}_i.$$

Donc

$$Z(\mathbb{C}G) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_s\}.$$

Par conséquent,

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = s.$$

D'autre part, d'après la décomposition de $\mathbb{C}G$ en composantes simples, on a

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}Ge_i,$$

où les e_i sont des idempotents centraux primitifs associés aux r classes d'isomorphisme de $\mathbb{C}G$ -modules simples. Il en résulte que

$$Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}e_i,$$

donc

$$\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = r.$$

Ainsi $s = r$. Or r est le nombre de caractères irréductibles de G , tandis que s est le nombre de classes de conjugaison de G . On en déduit que le nombre de caractères irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G . $\square$

Exemple 6.37.

$$Z(\mathbb{C}S_3) = \langle id, (12) + (13) + (23), (123) + (132) \rangle$$

Remarque 6.38. Ce que nous voulons pour la représentation irréductible de S_n est

$$\begin{aligned} \#\{\text{partitions de } n\} &= \#\{\text{classes de conjugaison de } \mathfrak{S}_n\} \\ &= \#\{\text{représentations irréductibles complexes de } \mathfrak{S}_n\}. \end{aligned}$$

La première égalité vient de la décomposition des permutations en cycles, la seconde vient du théorème 6.25 et théorème 6.36. Plus précisément, d'après 6.25, on a

$$\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}^{m_i * m_i},$$

or $Z(\mathbb{C}^{m_i * m_i}) = \lambda_i Id_{m_i}$, donc

$$\dim(Z(\mathbb{C}G)) = r$$

où r est aussi le nombre de conjugaison d'après le théorème 6.36.

RÉFÉRENCES

- [1] William Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society, Student Texts, 35.
- [2] Bruce Eli Sagan, *The Symmetric Group*, Graduate Texts in Mathematics, 203
- [3] Gordon James and Martin Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press.