Pavages du disque et théorème de Poincaré

Jérémy Grayel

4 juillet 2025

Contents

1 Métrique et géométrie hyperbolique **3**
1.1 Géodésiques de l'espace hyperbolique 3
1.2 Notion d'aire hyperbolique 7

2 Homographies et groupe de Möbius **9**
2.1 Groupe de Möbius, premières propriétés 9
2.2 Groupe de Möbius de $\mathbb{H}$ 13
2.3 Un autre modèle : le disque unité 20

3 Inversion de cercle **23**
3.1 Definition et premières propriétés 23
3.2 Constructions à la règle et au compas 26

4 Pavages du disque **31**
4.1 Polygones du disque 31
4.2 Contraintes de pavage 38
4.3 Appariements 42
4.4 Théorème de Poincaré et exemples 44

Introduction

Le projet de L3 dont ce document est le compte-rendu à été encadré par Serge Parmentier, que je remercie chaleureusement. Son implication, sa pédagogie et ses explications ont largement contribué à la réussite de ce projet.

Ce document a pour but de faire découvrir au lecteur les pavages du disque unité par des polygones hyperboliques. Pour y parvenir, nous nous arrêterons sur plusieurs points clés tels que la géométrie hyperbolique et le groupe de Möbius. L'étude et la compréhension des pavages est fortement liée à certains groupes. Ceux-ci sont intrinsèquement liés à des topologies quotient, ce qui motive leur étude — mais nous n'explorerons pas ce point de vue.

Bibliographie

Les références suivantes ont inspiré ce travail et offrent des pistes pour approfondir l'étude du sujet :

- Notes de cours de S.Parmentier
- Hyperbolic Geometry, James W.Anderson, Springer (2005)
- Hyperbolic Geometry (London Mathematical Society Student Texts), Birger Iversen, Cambridge University Press (1993)
- Hyperbolic Geometry, Caroline Series, PDF (2008)

1 Métrique et géométrie hyperbolique

1.1 Géodésiques de l'espace hyperbolique

Soit S une k-surface de $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert, et $\varphi : U \longrightarrow S$ un paramétrage local de S, c'est à dire une immersion injective. Soit $m \in S$.

Définition 1.1 (Plan tangent)**.** On définit le plan tangent à S au point m comme l'ensemble des dérivées au point m des courbes lisses tracées sur S :

$$T_m S = \{\gamma'(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow S, \gamma(0) = m\}$$

C'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ passant par m, et de direction $\mathrm{Im}(d_m\varphi)$.

Définition 1.2 (Métrique Riemannienne)**.** On définit sur S une métrique Riemannienne c'est à dire la donnée en tout point m de S d'un produit scalaire :

$$\begin{gathered} g_m : T_m S \times T_m S \longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) \longmapsto g_m(X, Y) \end{gathered}$$

avec la contrainte que quelque soit le paramétrage de φ, si X et Y sont des combinaions linéaires d'éléments de $\mathrm{Im}(d\varphi)$ à coefficients dans $C^\infty(U)$, alors l'application $t \longmapsto g_{\varphi(t)}(X(t), Y(t)) \in C^\infty(U)$.

Définition 1.3 (Longueur d'une courbe)**.** Étant donné un segment I de $\mathbb{R}$, et une courbe $\gamma : I \longrightarrow S$, on définit la longueur de γ, notée $l(\gamma)$ par

$$l(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt.$$

Définition 1.4. On appelle demi-plan de Poincaré et on note $\mathbb{H}$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$.

On observe que $\mathbb{H}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, qu'on identifiera à partir d'ici à $\mathbb{R}^2$. Un paramétrage de $\mathbb{H}$ se fait par l'application identité :

$$\begin{gathered} id : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\} \longrightarrow \mathbb{H} \\ (x, y) \longmapsto x + iy \end{gathered}$$

Aussi la différentielle de ce paramétrage est l'identité, et donc le plan tangent à $\mathbb{H}$ en un point $z \in \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$ lui même. En considérant $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, on va définir sur $\mathbb{H}$ la métrique suivante :

$$\forall z \in \mathbb{H},\ g_z : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \longmapsto \frac{\langle X, Y \rangle}{Im(z)^2}$$

Il en résulte la formule suivante pour la longueur d'une courbe : pour $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{H}$,

$$l(\gamma) = \int_I \frac{\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}}{Im(\gamma(t))}\, dt.$$

Exemple : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. On paramètre le segment entre ia et ib par $\gamma : t \longmapsto it$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}}{Im(\gamma(t))}\, dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{t}\, dt \\ &= ln(\frac{b}{a}) \end{aligned}$$

Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$. On se demande maintenant quelles sont les applications de $\mathbb{H}$ dans lui-même qui préservent la longueur, c'est à dire les applications qui vérifient $l(\psi \circ \gamma) = l(\gamma)$ avec $\psi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ différentiable.

D'une part,

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt.$$

D'autre part en utilisant la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} l(\psi \circ \gamma) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\psi\circ\gamma(t)}((\psi \circ \gamma)'(t), (\psi \circ \gamma)'(t))}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{g_{\psi\circ\gamma(t)}(d_{\gamma(t)}\psi(\gamma'(t)), d_{\gamma(t)}\psi(\gamma'(t)))}\, dt \end{aligned}$$

Ainsi si $\forall z \in \mathbb{H}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$g_z(X, Y) = g_{\psi(z)}(d_z\psi X, d_z\psi Y)$$

alors ψ préserve la longueur.

La notion de longueur étant défnie, on peut maintenant définir la distance comme suit : soient $x, y \in \mathbb{H}$, on note $C_{x,y}$ l'ensemble des courbes paramétrées, dérivables par morceaux joignant x et y. Alors $d(x, y) = inf\{l(\gamma), \gamma \in C_{x,y}\}$, et on appelle géodésique toute courbe réalisant cet infimum. On admet que d définit une distance sur $\mathbb{H}$.

Proposition 1.5. *Soient $x, y \in \mathbb{H}$. Alors il existe une unique géodésique entre x et y. De plus cette géodésique est soit un segment de droite verticale, soit un arc de cercle centré en un point de l'axe réel.*

Preuve : On va d'abord traiter le cas ou x et y ont même partie réelle. Notons $x = a + ib$ et $y = a + ic$. Sans perte de généralités on peut supposer que $b < c$. Nous avons vu dans l'exemple plus haut que le segment de droite reliant x et y a pour longueur $ln(\frac{c}{b})$. Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{H}$ une courbe dérivable par morceaux telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Alors

$$
\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}}{Im(\gamma(t))}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{Re(\gamma'(t))^2 + Im(\gamma'(t))^2}}{Im(\gamma(t))}\, dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{\sqrt{Im(\gamma'(t))^2}}{Im(\gamma(t))}\, dt \\
&= \int_0^1 Im(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)})\, dt \\
&= ln(Im(\frac{\gamma(1)}{\gamma(0)})) \\
&= ln(\frac{c}{b})
\end{aligned}
$$

c'est à dire la longueur du segment reliant x à y. On notera que $z \longmapsto Im(z)$ est la projection canonique sur la seconde coordonnée qui s'écrit $p : (x, y) \longmapsto y$ dans $\mathbb{R}^2$, ce qui justifie que $t \longmapsto ln(Im(\gamma(t)))$ est bien une primitive de $t \longmapsto Im(\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)})$.

On observe également que l'égalité est vérifiée si et seulement si $\forall t \in [0, 1]$, $Re(\gamma'(t)) = 0$, ie $Re(\gamma)$ est constante. Les géodésiques entre x et y sont donc sur la droite verticale passant par x et y. Aussi si γ n'est pas le segment vertical reliant x à y, il existe $s = a+id$ sur la droite verticale reliant x à y tel que $d < b$ ou $d > c$, et donc γ a une longueur supérieure à celle du segment $[x, y]$. Ceci justifie que le segment vertical reliant x à y est l'unique géodésique entre ces deux points.

Traitons à présent le cas général. Si x et y n'ont pas même partie réelle, alors il existe un unique cercle centré en un point de l'axe réel passant par x et y. On va montrer que l'arc de cercle est l'unique géodésique entre x et y. Notons R son rayon et Ω son centre. Le centre Ω se construit comme l'intersection de l'axe réel et de la médiatrice entre x et y. Soient $\alpha = \Omega - R$ et $\beta = \Omega + R$ les deux points d'intersection de l'axe réel et du cercle. On considère l'application $f : z \longrightarrow -\frac{1}{z-\alpha}$, on utilisera dans cette preuve, et on démontrera plus loin dans la section dédiée au groupe de Möbius, qu'elle est une isométrie (bijective) préservant $\mathbb{H}$. La propriété de f qui nous intéresse est qu'elle transforme le cercle en une droite verticale dont nous savons plus facilement étudier les propriétés. Soit $z \in C(\Omega, R)$. Alors :

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{z-\alpha}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{\overline{(z-\alpha)}}{|z-\alpha|^2}\right) = -\frac{\mathrm{Re}(z-\alpha)}{|z-\alpha|^2}$$

Mais comme $z \in C(\Omega, R)$, $|z-\Omega|^2 = R^2$ donc $|z-\alpha-R|^2 = R^2$, d'où $|z-\alpha|^2 = 2RRe(z-\alpha)$. Par suite,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = -\frac{\mathrm{Re}\,(z-\alpha)}{2R\,\mathrm{Re}\,(z-\alpha)} = \frac{-1}{2R}.$$

Ainsi l'image de $C(\Omega, R)$ par f est incluse dans une droite verticale d'abcisse $\frac{-1}{2R}$. Puisque f est une isométrie, elle préserve la longueur et donc la distance. La distance entre les deux points images $f(x)$ et $f(y)$ est donc la distance entre x et y. Par conséquent, le segment $[f(x), f(y)]$ étant l'unique géodésique entre ces deux points (ils sont sur une même droite verticale), alors l'arc de cercle entre x et y défini plus haut est l'unique géodésique reliant x et y (puisque f envoie les géodésiques sur les géodésiques).

□

1.2 Notion d'aire hyperbolique

Nous pouvons également définir la notion d'aire à l'aide de la métrique. Pour cela introduisons d'abord l'objet suivant :

Définition 1.6. Soit S une surface paramétrée par l'immersion injective

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 : (s,t) \longmapsto \varphi(s,t).$$

On appelle première forme fondamentale au point $\varphi(s,t)$ de S, la restriction à $Im(d_{(s,t)}\varphi)$ du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

Nous serons amenés à considérer la matrice de cette première forme fondamentale. φ est une immersion, et donc une base de $Im(d_{(s,t)}\varphi)$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par $Im(d_{(s,t)}\varphi)$, ie la base $(\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t})$. Dans cette base la matrice recherchée est donc :

$$G(s,t) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle \end{pmatrix}$$

Nous supposerons par la suite que les composantes de cette matrice sont des applications de $C^1(U)$.

Définition 1.7 (Aire)**.** Soit $\Delta \subset U$ un compact. Alors l'aire de $\varphi(\Delta) \subset S$ est

$$\text{Aire}(\varphi(\Delta)) = \int_{\Delta} \sqrt{det(G(s,t))}\, dsdt.$$

Dans notre cas, rappellons que $\forall z \in \mathbb{H}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$g_z(X,Y) = \frac{\langle X, Y \rangle}{Im(z)^2}.$$

Puisque la différentielle de notre paramétrage est l'identité, une base de l'espace tangent est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et il vient donc que dans cette base,

$$\forall z \in \mathbb{H},\ G(z) = \frac{1}{Im(z)^2} I_2.$$

Nous en déduisons que si Δ est un compact de $\mathbb{H}$,

$$\text{Aire}(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{1}{y^2}\, dxdy.$$

Le calcul de l'aire est parfois laborieux, mais nous allons voir que les mêmes applications qui laissent la longueur invariante, laissent l'aire invariante :

Proposition 1.8. *Soit un C^1-difféomorphisme $h : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ tel que $\forall z \in \mathbb{H}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,*

$$g_z(X,Y) = g_{h(z)}(d_z hX, d_z hY).$$

Alors h préserve l'aire.

Preuve : Notons $z = x + iy$, et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$. On note $J_z h$ la matrice jacobienne de h. Il faut montrer que Aire(Δ) =Aire$(h(\Delta))$, ie

$$\int_{\Delta} \sqrt{det(G(x,y))}\, dxdy = \int_{h(\Delta)} \sqrt{det(G(u,v))}\, dudv.$$

Remarquons qu'en utilisant la formule de changement de base des formes bilinéaires, on établit que

$$[g_z(e_i,e_j)]_{i,j} = \left[g_{h(z)}(J_z h e_i, J_z h e_j)\right]_{i,j} = {}^t J_z h \left[g_{h(z)}(e_i,e_j)\right]_{i,j} J_z h.$$

Ainsi, puisque $(x,y) \longmapsto \sqrt{det(G(x,y))}$ définit une application continue donc mesurable, et sous l'hypothèse que h définit un C^1-difféomorphisme, la formule de changement de variables indique que

$$\begin{aligned}\int_{h(\Delta)} \sqrt{det(G(x,y))}\, dxdy &= \int_{\Delta} \sqrt{det(G(h(u,v)))}\, \left|det(J_{(u,v)}h)\right|\, dudv \\ &= \int_{\Delta} \sqrt{det({}^tJ_{(u,v)}h) det(G(h(u,v))) det(J_{(u,v)}h)}\, dudv \\ &= \int_{\Delta} \sqrt{det(G(u,v))}\, dudv\end{aligned}$$

en utilisant la remarque précédente et les propriétés du déterminant.

□

2 Homographies et groupe de Möbius

2.1 Groupe de Möbius, premières propriétés

Définition 2.1 (Homographie)**.** Soient $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tels que $ad-bc>0$. Une homographie est une application

$$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$$

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Une homographie étant déterminée par quatre nombres complexes, on intruduit naturellement l'application suivante :

$$\phi : Gl_2(\mathbb{C}) \longrightarrow Hom(\widehat{\mathbb{C}})$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

On vérifie que ϕ définit un morphisme de $(Gl_2(\mathbb{C}), \times)$ dans le groupe $(Hom(\widehat{\mathbb{C}}), \circ)$ des homéomorphismes de $\widehat{\mathbb{C}}$:

Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors

$$\phi(AB) = \phi(\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ a'c+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}) = h_A \circ h_B = \phi(A) \circ \phi(B)$$

Quitte à multiplier au numérateur et au dénominateur par l'inverse du déterminant de la matrice associée à l'homographie, on pourra supposer que les matrices sont de déterminant 1, c'est à dire des matrices de $SL_2(\mathbb{C})$. Enfin on appelle Mob^+ le groupe des homographies $\{z \longmapsto h_A(z), A \in SL_2(\mathbb{C})\}$. On notera que $Ker(\phi) = \mathbb{C}^* I_2$, et donc que $Mob^+ \cong GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* I_2$ ou encore $Mob \cong SL_2(\mathbb{C})/\pm I_2$ en se limitant aux matrices de déterminant 1.

Proposition 2.2 (Générateurs de Mob^+)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les applications $z \longmapsto az + b$ et $J : z \longmapsto \frac{1}{z}$ engendrent Mob^+.*

Preuve : Soit $m : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ une homographie. Si $c \neq 0$, on considère les homographies suivantes :

$$f_1 : z \longmapsto z + \frac{d}{c}, J : z \longmapsto \frac{1}{z}, f_2 : z \longmapsto \frac{bc - ad}{c^2} z + \frac{a}{c}$$

Puis on vérfie que $f_2 \circ J \circ f_1 = m$. Enfin si $c = 0$, m est déjà de la bonne forme.

□

On peut également considérer l'action de $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ par homographie pour établir ce résultat utile :

Proposition 2.3. *L'action de $SL_2(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est strictement triplement transitive. Autrement dit, étant donnés (z_1, z_2, z_3) et $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ deux triplets d'éléments distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$, il existe une unique homographie m telle que $m.(z_1, z_2, z_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.*

Pour montrer ce résultat mous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4. *Soit $m \in Mob^+$ une homographie admettant 3 points fixes. Alors $m = id$.*

Preuve : Notons $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}}, m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec les conventions habituelles $m(\infty) = \frac{a}{c}$ et $m(\frac{-d}{c}) = \infty$. Supposons que $m \neq id$. Si $c = 0$, d'une part $m(\infty) = \infty$ et donc ∞ est un premier point fixe, et d'autre part si $z \in \mathbb{C}$, alors l'égalité $m(z) = z$ nous invite à résoudre l'équation $(a - d)z + b = 0$, et donc $\frac{b}{d-a}$ est un second point fixe si $a \neq d$. Si $a = d$, l'équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{C}$, sauf si $b = 0$, auquel cas $m = id$ ce qui est exclu. Ainsi m admet un ou deux points fixes. Si $c \neq 0$, $m(\infty) = \frac{a}{c}$, donc ∞ n'est pas un point fixe. Néanmoins la résolution dans $\mathbb{C}$ de $m(z) = z$ nous permet de dire que les points fixes de m sont exactement les solutions de $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

et m admet au maximum deux points fixes. Finalement si $m \neq id$, alors m admet au plus deux points fixes, et donc toute homographie admettant plus de deux points fixes est l'identité.

□

Preuve de la proposition :

Unicité : Soient m_1 et m_2 deux homographies envoyant (z_1, z_2, z_3) sur $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Alors $m_1^{-1} \circ m_2$ admet z_1, z_2 et z_3 pour points fixes. D'après le lemme précédent, $m_1^{-1} \circ m_2 = id$ ie $m_1 = m_2$.

Existence : Dans un premier temps, supposons que (z_1, z_2, z_3) soit un triplet d'éléments distincts de $\mathbb{C}$. On montre que

$$m(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$. De plus puisque $(z_2 - z_3)(-z_3)(z_2 - z_1) - (-z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_2 - z_1)(z_1 - z_3) \neq 0$, alors $m \in Mob^+$. Reste à traiter le cas où ∞ apparait dans l'un des triplets. Pour cela remarquons que

$$m'(z) = \frac{(z_2 - z_3)}{(z - z_3)}$$

envoie (∞, z_2, z_3) sur $(0, 1, \infty)$ et que $-(z_2 - z_3) \neq 0$ donc $m' \in Mob^+$.

Soit $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ un triplet d'élements distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. La même construction montre qu'il existe $n \in Mob^+$ telle que n envoie $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sur $(0, 1, \infty)$, de sorte que $n^{-1} \circ m$ envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

□

Élargissons maintenant notre terrain de jeu, et intéressons nous à C : $z \longmapsto \overline{z}$. Plus particulièrement, si $A \in SL_2(\mathbb{C})$, on considèrera les applications $z \longmapsto h_A(\overline{z})$, et on appellera groupe de Möbius, noté Mob la réunion

$$Mob = \{z \longmapsto h_A(z),\ A \in SL_2(\mathbb{C})\} \cup \{z \longmapsto h_A(\overline{z}),\ A \in SL_2(\mathbb{C})\}$$

L'étude du groupe de Möbius Mob est motivée par ses propriétés géométriques, notamment la suivante :

Proposition 2.5. *Le groupe de Möbius transforme cercles et droites de $\widehat{\mathbb{C}}$ en cercles ou droites.*

Preuve : Il suffit de le vérifier pour les générateurs ; autrement dit vu la construction de Mob, les applications $z \longmapsto az + b$, J et C, pour $a \in \mathbb{R}^*$

et $b \in \mathbb{R}$. Rappelons d'abord que si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, le cercle est défini par

$$C(z_0, R) = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z - z_0|^2 = R^2 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C},\ |z|^2 - \overline{z} z_0 - z\overline{z_0} = R^2 - |z_0|^2 \right\}$$

et que si $a, b, c \in \mathbb{R}$, une droite est définie par

$$\{ z \in \mathbb{C},\ aRe(z) + bIm(z) + c = 0 \} = \left\{ z \in \mathbb{C},\ \frac{1}{2}[(a - ib)z + (a + ib)\overline{z}] + c = 0 \right\}$$

en utilisant que $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{-i(z-\overline{z})}{2}$. Ainsi cercles et droites partagent la forme

$$\left\{ z \in \mathbb{C},\ \alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta} z + \gamma = 0 \right\}$$

où $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha \neq 0$ si et seulement si c'est une cercle, et respectivement $\alpha = 0$ si et seulement si c'est une droite).

Soit $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, tel que $\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta} z + \gamma = 0$, et ω tel que $\omega = az + b$, et donc $z = \frac{\omega - b}{a}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta} z + \gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\omega - b}{a}\frac{\overline{\omega - b}}{a} + \beta\frac{\overline{\omega - b}}{a} + \overline{\beta}\frac{\omega - b}{a} + \gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 |\omega - b|^2 + a\beta(\overline{\omega - b}) + a\overline{\beta}(\omega - b) + a^2\gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 |\omega|^2 + (a\overline{\beta} - b)\omega + (a\beta - b)\overline{\omega} + a^2\gamma + b^2 - 2Re(a\beta b) = 0
\end{aligned}$$

avec $a^2 \in \mathbb{R}$, $\overline{(a\overline{\beta} - b)} = (a\beta - b)$ et $a^2\gamma + b^2 - 2Re(a\beta b) \in \mathbb{R}$. Donc ω est élement d'une droite ou d'un cercle.

Si $\omega = J(z) = \frac{1}{z}$, alors $z = \frac{1}{\omega}$ et donc

$$\begin{aligned}
&\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta} z + \gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \alpha\frac{1}{\omega}\frac{1}{\overline{\omega}} + \beta\frac{1}{\overline{\omega}} + \overline{\beta}\frac{1}{\omega} + \gamma = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \gamma\overline{\omega}\omega + \overline{\beta}\overline{\omega} + \beta\omega + \alpha = 0
\end{aligned}$$

avec une nouvelle fois les conditions sur α, β, γ remplies.

Enfin si $\omega = C(z) = \overline{z}$, $z = \overline{\omega}$ et,

$$\begin{aligned} &\alpha z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\alpha\overline{\omega}\omega + \beta\omega + \overline{\beta}\overline{\omega} + \gamma = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que les générateurs de Mob transforment cercles et droites en cercles ou droites. Chaque élément de Mob s'écrivant comme composée de ces 3 transformations, on a bien le résultat voulu.

□

2.2 Groupe de Möbius de $\mathbb{H}$

Définition 2.6. On appelle groupe de Möbius de $\mathbb{H}$ et on note $Mob(\mathbb{H})$ le sous-groupe de Mob qui préserve $\mathbb{H}$.

On se demande quelle est l'expression des éléments de $Mob(\mathbb{H})$. Observons que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une droite qui délimite le demi-plan $\mathbb{H}$. En déterminant les éléments de Mob^+ qui préservent $\overline{\mathbb{R}}$, on obtient les homographies qui envoient le demi-plan $\mathbb{H}$ sur le demi-plan supérieur ou inférireur. Quitte à composer par $C : z \longmapsto \overline{z}$, on trouve ainsi les éléments de Mob qui envoient $\mathbb{H}$ sur lui-même. Nous allons voir que ces éléments ont une forme particulière. Quitte à remormaliser, on peut supposer par la suite que les matrices associées aux homographies sont de déterminant 1.

Lemme 2.7. *Les éléments de Mob tels qui envoient $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ sont de la forme :*

$$\begin{aligned} 1-\ & m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ \textit{avec}\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ 2-\ & m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \ \textit{avec}\ a,b,c,d \in \mathbb{R} \\ 3-\ & m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \ \textit{avec}\ a,b,c,d \in i\mathbb{R} \\ 4-\ & m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \ \textit{avec}\ a,b,c,d \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Preuve : Soit $m : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$, telle que $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Les points

$$m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c},\ m(\infty) = \frac{a}{c},\ et\ m^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$$

appartiennent donc à $\overline{\mathbb{R}}$. Suposons que $a \neq 0$ et que $c \neq 0$. On peut écrire

$$a = cm(\infty),\ b = -am^{-1}(0) = -cm(\infty)m^{-1}(0)\ et\ d = -cm^{-1}(\infty)$$

pour obtenir que

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{cm(\infty)z - cm(\infty)m^{-1}(0)}{cz - cm^{-1}(\infty)}$$

Puisqu'on a choisi que la matrice associée à m est de déterminant 1, on a

$$\begin{aligned} & -c^2 m(\infty)m^{-1}(\infty) + c^2 m(\infty)m^{-1}(0) = 1 \\ \Longrightarrow\ & c^2[m(\infty)(m^{-1}(0) - m^{-1}(\infty))] = 1 \end{aligned}$$

et comme $m^{-1}(\infty),\ m(\infty),\ et\ m^{-1}(0)$ sont réels (a et c non nuls), alors $c^2 \in \mathbb{R}$, et donc $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in i\mathbb{R}$. Il en résulte que a, b, c et d sont ou tous réel, ou tous immaginaires purs.

Si $a = 0$, alors $c \neq 0$ sinon quoi le déterminant serait nul. On a que

$$m(1) = \frac{b}{c+d}\ et\ m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$$

sont réels, d'où

$$d = -m^{-1}(\infty)c\ et\ b = (c+d)m(1) = c(m(1) - m(1)m^{-1}(\infty))$$

et donc puisque $ad - bc = -bc = 1$,

$$c^2(m(1)m^{-1}(\infty) - m(1)) = 1$$

on retrouve bien que a, b, c et d sont ou tous réels, ou tous immaginaires purs.

Si $c = 0$, alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$. Comme précédemment, on observe que

$$m(0) = \frac{b}{d}\ et\ m(1) = \frac{a+b}{d}$$

sont réels, et donc que

$$b = m(0)d \text{ et } a = (m(1) - m(0))d$$

et la condition sur le déterminant impose que

$$ad - bc = ad = (m(1) - m(0))d^2$$

et donc d^2 est soit réel soit immaginaire pur, et on conclut pareillement.

Ce raisonnement montre que les éléments de Mob^+ qui envoient $\overline{\mathbb{R}}$ sur lui-même sont de la forme $m(z)$ avec a, b, c, d tous réels ou tous immaginaires purs. Il se généralise à Mob en observant que $C : z \longmapsto \overline{z}$ laisse $\overline{\mathbb{R}}$ invariant. □

Proposition 2.8. *Les éléments de $Mob(\mathbb{H})$ sont de la forme :*

- $m(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$
- $m(z) = \dfrac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$ *avec* $a,b,c,d \in i\mathbb{R}$

Preuve : Vu le lemme précédent, nous avons identifié les élements de Mob qui préservent $\overline{\mathbb{R}}$, il suffit donc de vérifier que le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ est envoyé sur lui-même. Pour cela vérifions que si m est de l'une des quatre formes vues plus haut, alors $Im(m(i)) > 0$.

<u>cas 1</u> : $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Im(m(i)) &= Im(\frac{ai + b}{ci + d}) \\ &= Im\left(\frac{(ai + b)(d - ci)}{c^2 + d^2}\right) \\ &= \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

cas 2 : $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Im(m(i)) &= Im(\frac{-ai+b}{-ci+d}) \\ &= Im\left(\frac{(-ai+b)(d+ci)}{c^2+d^2}\right) \\ &= \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

cas 3 : $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$. On peut écrire $a = i\alpha$, $b = i\beta$, $c = i\gamma$ et $d = i\delta$, avec α, β, γ, et δ réels.

$$\begin{aligned} Im(m(i)) &= Im(\frac{ai+b}{ci+d}) \\ &= Im(\frac{-\alpha+i\beta}{-\gamma+i\delta}) \\ &= Im\left(\frac{(-\alpha+i\beta)(-\gamma-i\delta)}{\gamma^2+\delta^2}\right) \\ &= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} \\ &= \frac{-ad+bc}{\gamma^2+\delta^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

cas 4 : $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$. On peut encore écrire $a = i\alpha$, $b = i\beta$, $c = i\gamma$ et $d = i\delta$, avec α, β, γ, et δ réels.

$$\begin{aligned} Im(m(i)) &= Im(\frac{-ai+b}{-ci+d}) \\ &= Im(\frac{\alpha+i\beta}{\gamma+i\delta}) \\ &= Im\left(\frac{(\alpha+i\beta)(\gamma-i\delta)}{\gamma^2+\delta^2}\right) \\ &= \frac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} \\ &= \frac{ad-bc}{\gamma^2+\delta^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

□

Voici maintenant quelques propriétés de $Mob(\mathbb{H})$ qui nous serons utiles par la suite :

Proposition 2.9. *$Mob^+(\mathbb{H})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$.*

Preuve : Il suffit de montrer que tout point $z \in \mathbb{H}$ peut-être envoyé sur i. Notons $z = a + ib$, alors $t : z \longmapsto z - a$ envoie z sur ib, et $h : z \longmapsto \frac{z}{b}$ envoie ib sur i. Puisque h et t sont des homographies à coefficients réels, $h, t \in Mob(\mathbb{H})$, et puisque $m(z) := h \circ t(z) = i$, on a bien la transformation voulue. Si $\omega \in \mathbb{H}$, par cette construction il existe $n \in Mob(\mathbb{H})$, telle que $n(\omega) = i$, et donc $n^{-1} \circ m$ envoie z sur ω.

□

En particulier le résutlat reste vrai pour $Mob(\mathbb{H})$.

Proposition 2.10. *Les éléments*

$$z \longmapsto az + b,\ K : z \longmapsto \frac{-1}{z},\ et\ B : z \longmapsto -\overline{z}$$

engendrent $Mob(\mathbb{H})$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Preuve : On remarque déjà que ces trois transformations appartiennent à $Mob(\mathbb{H})$. D'une part si $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$, on distingue deux cas :

Si $c = 0$, alors $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, et puisque $ad - bc = ad = 1$, $\frac{a}{d} > 0$, m est dans la bonne forme.

Si $c \neq 0$, on pose

$$f(z) = z + \frac{a}{c} \; et \; g(z) = c^2 z + cd$$

puis on vérifie que $m = f \circ K \circ g$.

D'autre part si $n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ avec $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$ et $ad - bc = 1$, on considère $B \circ n = m$, qui est un élement de $Mob(\mathbb{H})$ par composition. Donc $n = B^{-1} \circ m = B \circ m$ puisque B est une involution.

□

Proposition 2.11. *$Mob(\mathbb{H})$ conserve la métrique sur $\mathbb{H}$.*

Preuve : Nous avons vu précédemment que pour qu'une application $\psi : \mathbb{H} \longmapsto \mathbb{H}$ conserve la métrique, il faut qu'elle vérifie la condition :

$$\forall z \in \mathbb{H}, \; \forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \; g_z(X, Y) = g_{\psi(z)}(d_z\psi X, d_z\psi Y)$$

On va vérifier cette condition pour les générateurs de $Mob(\mathbb{H})$.

Pour $\psi : z \longmapsto az+b$, on vérifie que la jacobienne en un point $z = x+iy \in \mathbb{H}$ est $J_\psi(x, y) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, et donc que $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g_{\psi(z)}(d_z\psi X, d_z\psi Y) &= \frac{\langle d_z\psi X, d_z\psi Y \rangle}{Im(\psi(z))^2} \\ &= \frac{a^2 \langle X, Y \rangle}{a^2 Im(z)^2} \\ &= g_z(X, Y) \end{aligned}$$

Pour $K : z \longmapsto \frac{-1}{z}$, la tâche est plus ardue : pour $z = x+iy$, K est bien $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{H}$ car $Im(z) > 0$, et on a $J_K(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}$. Quelque soient x et y, $det(J_K(x, y)) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4} > 0$, et donc la jacobienne est inversible. On peut écrire sa décomposition polaire $J_K(x, y) = OS$, avec $O \in O_2(\mathbb{R})$, et $S \in S_2^{++}(\mathbb{R})$. On sait que $S = ({}^t J_K(x, y) J_K(x, y))^{\frac{1}{2}}$, et donc

$$S = \frac{1}{x^2 + y^2} I_2$$

On en déduit, en utilisant que O est orthogonale, que $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g_K(z)(d_zKX, d_zKY) &= \frac{\langle d_zKX, d_zKY\rangle}{Im(K(z))^2} \\ &= \langle OSX, OSY\rangle \frac{(x^2+y^2)^2}{y^2} \\ &= \langle SX, SY\rangle \frac{(x^2+y^2)^2}{y^2} \\ &= \frac{\langle X, Y\rangle}{(x^2+y^2)^2}\frac{(x^2+y^2)^2}{y^2} \\ &= \frac{\langle X, Y\rangle}{y^2} \\ &= g_z(X, Y) \end{aligned}$$

Enfin pour $B : z \longmapsto -\overline{z}$, la jacobienne en tout point $z = x + iy \in \mathbb{H}$ est $J_B(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est orthogonale et donc $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} g_{B(z)}(d_zBX, d_zBY) &= \frac{\langle d_zBX, d_zBY\rangle}{Im(B(z))^2} \\ &= \frac{\langle X, Y\rangle}{Im(z)^2} \\ &= g_z(X, Y) \end{aligned}$$

On a bien montré que les générateurs conservent la métrique et ainsi $Mob(\mathbb{H})$ préserve la métrique.

□

Proposition 2.12. *$Mob(\mathbb{H})$ agit transitivement sur les paires de points équidistants de $\mathbb{H}$. Autrement dit, si (x, y) et (x', y') sont tels que $d(x, y) = d(x', y')$, alors il existe $m \in Mob(\mathbb{H})$, tel que $m.(x, y) = (x', y')$.*

Preuve : Soit $(x, y) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Nous avons vu précédemment que les géodésiques dans $\mathbb{H}$ étaient des segments de droite verticale, ou bien des arcs de cercle d'un cercle centré en un point de l'axe réel. En particulier, si le cercle en question s'écrit $C(\Omega, R)$, en introduisant $\alpha = \Omega - R$, nous avions

établi que $f : z \longrightarrow -\frac{1}{z-\alpha}$ envoie le cercle sur une droite d'abcisse $-\frac{1}{2R}$. Or $f \in Mob(\mathbb{H})$ puisque ses coefficients sont réels. On peut donc toujours se ramener à un segment de droite verticale. Mais, on peut toujours translater cette segment de droite sur l'axe imaginaire à l'aide d'une translation $z \longmapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$. Mieux encore, à l'aide d'une homothétie $z \longmapsto az$, $a > 0$, on peut envoyer l'image de x en i. Pour finir, on peut toujours supposer que l'image de y est au dessus de i quitte à commposer par la transformation $z \longmapsto -\frac{1}{z} \in Mob(\mathbb{H})$, dont i est un point fixe. On construit ainsi une transformation s de $Mob(\mathbb{H})$, qui envoie la géodésique entre x et y sur une géodésique de $\mathbb{H}$ qui est un segment de droite verticale de l'axe imaginaire, dont une extrémité est i, et dont l'autre extrémité est de partie imaginaire supérieure à i. Si $(x', y') \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, on peut contruire s' de la même manière de sorte que $s'^{-1} \circ s \in Mob(\mathbb{H})$ envoie (x, y) sur (x', y') tout en préservant la distance entre ces points.

□

2.3 Un autre modèle : le disque unité

Nous avons établi un certain nombre de propriétés sur le demi-plan $\mathbb{H}$. Un autre modèle pour la géométrie hyperbolique est le disque unité $D(0, 1) := D$ de $\mathbb{C}$. L'application

$$C : z \longmapsto \frac{z - i}{z + i}$$

est un biholomorphisme qui envoie le demi plan $\mathbb{H}$ sur le disque D, qu'on appelle transformation de Cayley. Sa réciproque est

$$C^{-1} : z \longmapsto i\frac{1 + z}{1 - z}$$

. Nous savons donc que ces deux ouverts sont biholomorphes, et nous allons voir que ce biholomorphisme conserve un certain nombre de propriétés de $\mathbb{H}$ vues plus haut.

Comme pour le demi-plan $\mathbb{H}$, nous allons définir sur D une métrique. D est une surface de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ paramétrée par l'application id en tout point $z \in D$. L'espace tangent à D est donc $Im(I_2) = \mathbb{C}$, et on munit cet espace tangent de la métrique suivante : $\forall z \in D,\ \forall U, V \in \mathbb{R}^2$,

$$g_z(U, V) = \frac{4 \langle U, V \rangle}{(1 - |z|^2)^2}$$

Proposition 2.13. *La transformation de Cayley C est une isométrie entre* $\mathbb{H}$ *muni de sa métrique* g^H *et D muni de sa métrique* g^D*.*

Preuve : Pour cela il suffit de vérifier la condition suivante : $\forall z \in \mathbb{H}$, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$g^D_{C(z)}(d_z CX, d_z CY) = g^H_z(X, Y)$$

.

D'une part on observe que $\forall z = x + iy \in \mathbb{H}$,

$$C(z) = \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2(y+ix)}{x^2+y^2}$$

et donc que la matrice jacobienne de C est $J_C(x,y) = \frac{1}{(x^2+(y+1)^2)^2}\begin{pmatrix} -4x(y+1) & 2x^2(y+1)^2 \\ -2x^2+2(y+1)^2 & -4x(y+1) \end{pmatrix}$. Elle est toujours inversible car $y \neq -1$. On peut écrire sa décomposition polaire $J_C(x,y) = OS$, et trouver que

$$S := ({}^t J_C(x,y) J_C(x,y))^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^2+(y+1)^2} I_2 = \frac{2}{|z+i|^2} I_2$$

D'autre part, $\forall z = x + iy \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} 1 - \left|C(z)^2\right| &= 1 - \left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2 \\ &= \frac{|z+i|^2 - |z-i|^2}{|z+i|^2} \\ &= \frac{x^2+(y+1)^2 - x^2 - (y-1)^2}{|z+i|^2} \\ &= \frac{4y}{|z+i|^2} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de montrer que $\forall z \in \mathbb{H},\ \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g^D_{C(z)}(d_zCX, d_zCY) &= \frac{4\langle d_zCU, d_zCV\rangle}{(1-|C(z)|^2)^2} \\ &= 4\langle OSU, OSV\rangle \left(\frac{|z+i|^2}{4y}\right)^2 \\ &= 4\langle U, V\rangle \frac{4}{|z+i|^4}\frac{|z+i|^4}{16y^2} \\ &= \frac{\langle U, V\rangle}{Im(z)^2} \\ &= g^H_z(X, Y) \end{aligned}$$

□

On déduit de cette proposition que les géodésiques de $\mathbb{H}$ sont envoyées sur les géodésiques de D. Mieux encore, les nombreuses propriétés de C vont nous permettre d'identifier les géodésiques de D :

Proposition 2.14. *Les géodésiques de D sont des arcs de cercles orthogonaux à ∂D, ou des segments de diamètres de D.*

Preuve : $C \in Mob$, et donc C envoie les cercles et les droites (donc les supports des géodésiques de $\mathbb{H}$) sur des cercles ou des droites. Puis on exploite le fait que C est un biholomorphisme, et donc une application conforme, c'est à dire qu'elle préserve les angles. Ainsi, puisque les géodésiques de $\mathbb{H}$ ont pour support des courbes orthogonales à l'axe réel, les supports des géodésiques de D sont orthogonaux au cercle unité ($= C(\overline{\mathbb{R}})$). Or les droites orthogonales au cercle unité sont exactement les diamètres, et les cercles orthogonaux au cercle unité sont ce qu'on a défini comme étant les cercles orthogonaux.

□

Pour clore cette section, on observera que les propriétés de $Mob(\mathbb{H})$ se transportent sur D puisque :

$$m \in Mob(\mathbb{H}) \Leftrightarrow C \circ m \circ C^{-1} \in Mob(D)$$

Autrement dit, le groupe de Möbius du disque est le conjugué par C du groupe de Möbius de $\mathbb{H}$.

3 Inversion de cercle

3.1 Definition et premières propriétés

On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. On note $C = C(z_0, R)$ le cercle centré en z_0 de rayon R. Considérons l'application suivante :

$$i_C : \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{z_0\} : z \longmapsto z_0 + R^2\frac{(z-z_0)}{|z-z_0|^2} = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{z_0}}$$

qu'on appellera inversion de cercle. C est appelé cercle d'inversion. Rappelons que $C = \left\{z \in \mathbb{C},\ |z-z_0|^2 = R^2\right\} = \left\{z \in \mathbb{C},\ |z|^2 - (\overline{z}z_0 + z\overline{z_0}) + |z_0|^2 = R^2\right\}$. Observons quelques propriétés de i_C :

1 - L'image d'un point $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ appartient à la demi-droite D d'origine z_0 passant par z : D s'écrit $\{z_0 + tz \mid t \in]\,0, +\infty\,[\}$, donc pour t réel strictement positif, nous avons

$$i_C(z_0 + tz) = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z_0 + tz} - \overline{z_0}} = z_0 + \frac{R^2}{t\overline{z}} = z_0 + \frac{R^2 z}{t\,|z|^2} \in D.$$

2 - L'ensemble des points fixes de i_C est le cercle C : soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$,

$$\begin{aligned} i_C(z) = z &\Leftrightarrow z_0 + \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{z_0}} = z \\ &\Leftrightarrow -|z_0|^2 + \overline{z}z_0 + R^2 = |z|^2 - z\overline{z_0} \\ &\Leftrightarrow |z|^2 - (\overline{z}z_0 + z\overline{z_0}) + |z_0|^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow |z-z_0|^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow z \in C. \end{aligned}$$

3 - i_C est une involution, ie $i_C \circ i_C = id$.

Le comportement de i_C est donc le suivant : étant donné $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, i_C envoie z sur la demi-droite d'origine z_0 passant par z. De plus, la distance de $i_C(z)$ à z_0 sur cette demi-droite est inversement proportionelle à la distance entre z et z_0. Il en résulte que le cercle C est invariant par i_C.

Par la suite nous serons amenés à considérer plusieurs cercles, et nous supposerons sauf mention contraire que le cercle d'inversion C est centré en 0 de sorte que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ i_C(z) = \frac{R^2}{\overline{z}}$. i_C est une transformation de Möbius, dont nous savons qu'elle transforme cercles et droites en cercles ou droites. La proposition ci-dessous redémontre ce résultat différemment en donnant une expression du centre et du rayon du cercle image qui nous sera utile par la suite :

Proposition 3.1 (Image d'un cercle par i_C)**.** *Soit $C' = C(z'_0, R')$ le cercle centré en $z'_0 \in \mathbb{C}^*$ de rayon $R' > 0$. L'image par i_C de C' est un cercle si $0 \notin C'$, ou une droite si $0 \in C'$.*

Preuve : <u>cas 1</u> : $0 \notin C'$.
Soit $z \in C'$. Notons $\omega = i_C(z) = \frac{R^2}{\overline{z}}$, donc $z = \frac{R^2}{\overline{\omega}}$. Montrons que ω est élément d'un cercle. Puisque $z \in C'$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& |z|^2 - (\overline{z}z'_0 + z\overline{z'_0}) + |z'_0|^2 = R'^2 \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{R^2}{\overline{\omega}}\right|^2 - (\frac{\overline{R^2}}{\overline{\omega}}z'_0 + \frac{R^2}{\overline{\omega}}\overline{z'_0}) = R'^2 - |z'_0|^2 \\
\Leftrightarrow\ & R^4 - R^2(\overline{\omega}z'_0 + \omega\overline{z'_0}) = |\omega|^2 (R'^2 - |z'_0|^2) \\
\Leftrightarrow\ & |\omega|^2 + \frac{R^2}{(R'^2 - |z'_0|^2)}(\overline{\omega}z'_0 + \omega\overline{z'_0}) = \frac{R^4}{(R'^2 - |z'_0|^2)} \\
\Leftrightarrow\ & |\omega|^2 - \frac{R^2}{(|z'_0|^2 - R'^2)}(\overline{\omega}z'_0 + \omega\overline{z'_0}) = \frac{-R^4}{(|z'_0|^2 - R'^2)}
\end{aligned}$$

c'est à dire ω appartient au cercle C'' centré en $z''_0 = \frac{R^2 z'_0}{(|z'_0|^2 - R'^2)}$ de rayon

$$\begin{aligned}
R''^2 = \frac{-R^4}{(|z'_0|^2 - R'^2)} + |z''_0|^2 &= \frac{-R^4}{(|z'_0|^2 - R'^2)} + \frac{R^4 |z'_0|^2}{(|z'_0|^2 - R'^2)^2} \\
&= \frac{-R^4(|z'_0|^2 - R'^2) + R^4 |z'_0|^2}{(|z'_0|^2 - R'^2)^2} \\
&= \frac{R^4 R'^2}{(|z'_0|^2 - R'^2)^2}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $i_C(C') \subset C''$. D'autre part, cela montre aussi que $i_C(C'') \subset C'$, et donc que $i_C \circ i_C(C'') = C'' \subset i_C(C')$. Finalement, $i_C(C') = C''$.

cas 2 : $0 \in C'$.
Si $0 \in C'$, alors $R'^2 = |z'_0|^2$. Soit $z \in C'$, on note $\omega = i_C(z) = \frac{R^2}{\overline{z}}$, et $z = \frac{R^2}{\overline{\omega}}$. z vérifie alors l'équation du cerle C'

$$|z|^2 - (\overline{z}z'_0 + z\overline{z'_0}) + |z'_0|^2 = R'^2 \Leftrightarrow z\overline{z} - (\overline{z}z'_0 + z\overline{z'_0}) = 0$$

et donc après substitution,

$$z'_0\overline{\omega} + \overline{z'_0}\omega = R^2.$$

Si on note $z'_0 = x'_0 + iy'_0$ et $\omega = x + iy$, il vient que

$$2(xx'_0 + yy'_0) = R^2$$

et on reconnait l'équation de la droite D dirigée par $(-y'_0, x'_0)$ qui passe par le point $\frac{R^2}{2|z'^2_0|}(x'_0, y'_0)$. Comme pour le cercle, $i_C(C') \subset D$, et en utilisant que $i_C(D) \subset C'$ et que i_C est une involution, il vient que $i_C(C') = D$.

□

Voyons maintenant une famille particulière de cercles qui possèdent de bonnes propriété vis-à-vis de l'inversion i_C :

Définition 3.2. Soient $C = C(z_0, R)$ et $C' = C(z'_0, R')$ deux cercles d'intersection non triviale. C et C' sont dit orthogonaux si

$$|z_0 - z'_0|^2 = R^2 + R'^2.$$

On note alors $C \perp C'$.

La terminologie de cercle orthogonal se justifie ainsi : puisque $|z_0 - z'_0|^2 = R^2 + R'^2$, alors le triangle de sommets z_0, z'_0 et un point d'intersection ω des deux cercles est rectangle en ω, ou encore la droite passant par z_0 et ω est orthogonale à celle passant par z'_0 et ω. La proposition suivante motive leur étude :

Proposition 3.3. *Soient $C = C(0, R)$ et $C' = C(z'_0, R')$ deux cercles d'intersection non triviale. Alors $i_C(C') = C'$ si, et seulement si $C' \perp C$.*

Preuve : Rappellons que de manière générale, l'image de C' par i_C est le cercle C'' centré en $z''_0 = \frac{R^2 z'_0}{(|z'_0|^2 - R'^2)}$ de rayon $R''^2 = \frac{R^4 R'^2}{(|z'_0|^2 - R'^2)^2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} i_C(C') = C' &\Leftrightarrow z'_0 = z''_0 \text{ et } R'^2 = R''^2 \\ &\Leftrightarrow z'_0 = \frac{R^2 z'_0}{(|z'_0|^2 - R'^2)} \text{ et } R'^2 = \frac{R^4 R'^2}{(|z'_0|^2 - R'^2)^2} \\ &\Leftrightarrow R^2 = (|z'_0|^2 - R'^2) \\ &\Leftrightarrow |z'_0|^2 = R^2 + R'^2 \\ &\Leftrightarrow C \perp C' \end{aligned}$$

□

Notons D le cercle unité fermé de $\mathbb{C}$. On appellera droites hyperboliques, les diamètres de D et les arcs de cercles orthogonaux au bord ∂D.

3.2 Constructions à la règle et au compas

Dans cette section, nous allons voir comment tracer à la règle et au compas les inversions de cercle. On rappelle que trois points A, B, C non alignés suffisent à déterminer de manière unique un cercle, et que celui-ci se trace en suivant l'algorithme suivant :
- tracer les segments $[AB]$ et $[BC]$,
- tracer les médiatrices de ce deux segments : par construction, leur point d'intersection I est équidistant de A, B et C, c'est donc le centre du cercle.
- tracer le cercle de centre I passant par l'un des points A, B ou C.

Traitons d'abord le cas de l'inversion d'un cercle C' passant par Ω, le centre de C. Nous avons vu que $i_C(C')$ est une droite. Il suffit donc de déterminer deux points images de C' par i_C. Pour cela, on peut voir que C et C' se coupent en exactement deux points. Ces deux points de C' sont donc invariants par i_C et sont des points de $i_C(C')$. Ainsi l'image de C' est la droite passant par les points d'intersection de C et C'.

Pour construire l'image d'un cercle C' par i_C, nous cherchons trois points de $i_C(C')$. Dans une situation favorable on peut choisir des points de $C \cap C'$, mais ce n'est pas toujours possible. On suppose que nous sommes dans la situation ou $C \cap C' = \varnothing$. Notons Ω le centre de C et Ω' le centre de C'. L'algorithme suivant permet de construire le cercle image :

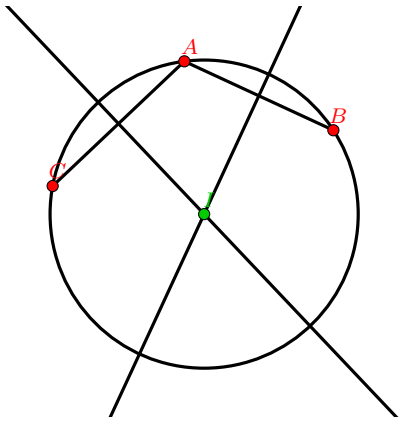

Figure 1: Construction du cercle à partir de 3 points

1 - tracer le segment $[\Omega\Omega']$ ainsi que son milieu Ω'',
2 - tracer le cercle C'' de centre Ω'' passant par Ω et Ω',
3 - Ω est un point de C'', et donc $i_C(C'')$ est la droite passant par les points d'intersection de C et C''. Noter A et B ces deux points puis tracer la droite (AB),
4 - Noter A' et B' les points d'intersections de C' et C'', puis tracer les segment $[\Omega A']$ et $[\Omega B']$: ces deux segments coupent la droite (AB) en deux points M_1 et M_2 qui sont par construction deux points images de C'.
5 - Pour obtenir un dernier point, noter D un point d'intersection de C' et de la droite $(\Omega\Omega')$, puis noter Ω''' le milieu de $[\Omega D]$,
6 - tracer le cercle C''' de centre Ω''' passant par D et Ω,
7 - son image par i_C est la droite passant par les points d'intersections de C''' et C : tracer cette droite.
8 - Celle-ci coupe $[\Omega D]$ en un point M_3 qui est un point image de C' par i_C.
9 - Tracer le cercle passant par M_1, M_2 et M_3.

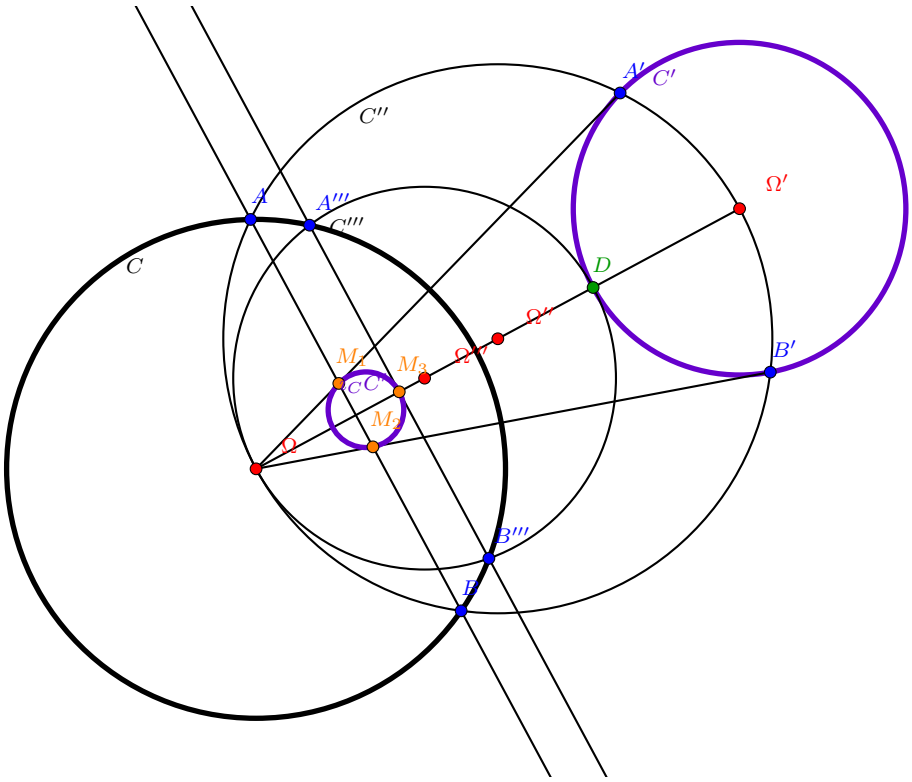

Figure 2: Construction de l'image de C' par i_C

Pour construire l'unique droite hyperbolique passant par A et B deux points du disque unité D, on peut procéder comme suit :
- Si $0, A$ et B sont alignés, alors le diamètre passant par ces trois points est la droite hyperbolique recherchée.
- Sinon on cherche à tracer C' cercle orthogonal à D passant par A et B. Si A ou B appartient à C, disons $A \in C$, on peut tracer la tangente à C passant par A, ainsi que la bissectrice du segment $[AB]$. Le point d'intersection de ces deux droites est le centre de C'. Dans le cas défavorable ou ni A ni B n'est élément de C, on peut suivre la méthode suivante :
1 - Tracer les deux demi-droites partant de l'origine et passant par respectivement par A et par B,
2 - Tracer la droite (AB), elle coupe le cercle C en deux points distincts D et E,
3 - Cette droite est l'image par i_C d'un certain cercle C'' passant par l'origine O, D et E. Tracer ce cercle.
4 - C'' intersecte les deux demi-droites construites à l'étape 1, noter respectivement F et G les points d'intersection de C'' avec les demi-droites d'origine O passant respectivement par A et B. Par construction, $A = i_C(F)$ et $B = i_C(G)$.
5 - Puisque nous supposons que A et B sont éléments d'un cercle orthogonal C', alors $i_C(A) = F \in C'$ en vertu de la propriété $i_C(C') = C'$. Tracer le cercle passant par A, B et F, c'est exactement C' (on vérifiera que $G = i_C(B) \in C'$).

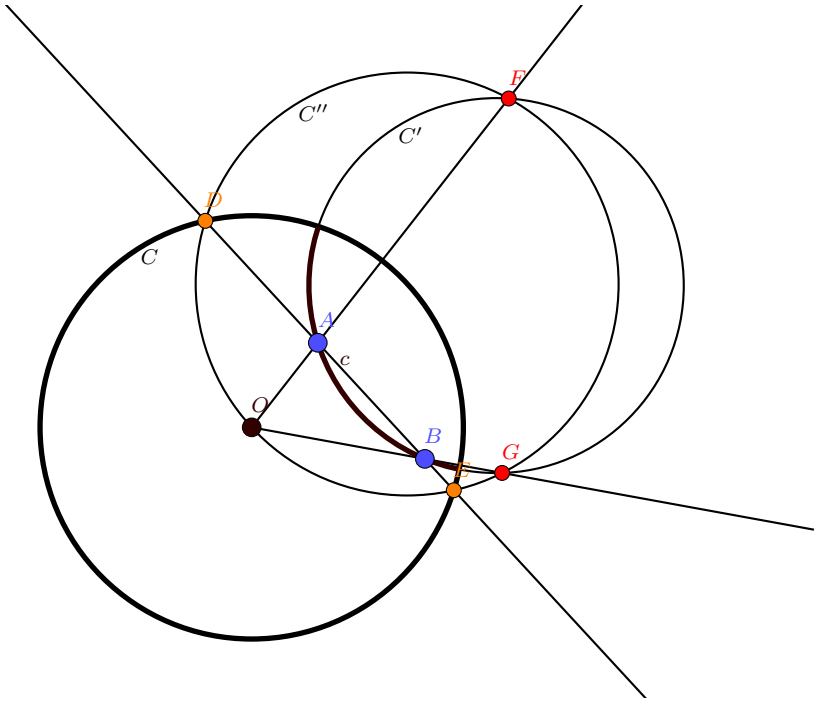

Figure 3: Construction d'un arc de cercle orthogonal à partir de deux points

4 Pavages du disque

4.1 Polygones du disque

On cherche maintenant à généraliser la notion euclidienne de polygone dans la géométrie hyperbolique. Dans le plan, en géométrie euclidienne, on appelle polygone une intersection finie de demi-plans fermés, compacte, d'intérieur non vide. Remarquons que de tels objets sont convexes. De manière analogue, dans le disque D, Q est un polygone s'il s'écrit comme intersection finie de demi-disques fermés et s'il est compact d'intérieur non vide. Les côtés d'un tel polygone sont des géodésiques du disque, ie des segments de diamètre ou des arcs de cercles orthogonaux au bord du disque. Enfin, un angle hyperbolique en un sommet s d'un polygone Q est défini comme l'angle euclidien entre les tangentes des deux géodésiques qui forment l'angle au point s.

Considérons maintenant le cas particulier du triangle. On peut vérifier assez facilement que la somme de ses angles est inférieure à π : pour cela remarquons que chaque triangle hyperbolique est inclus dans le triangle euclidien de même sommets. Mieux encore, étant donnés les angles d'un triangle nous pouvons en déduire son aire :

Théorème 4.1. *L'aire d'un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets valent α, β et γ vaut $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.*

Preuve : On se place dans $\mathbb{H}$. On pourra toujours transporter le résultat sur D via la transformation de Cayley.

Étape 1 : On s'intéresse d'abord à un triangle dont les sommets sont à l'infini. L'action de $Mob(\mathbb{H})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ étant triplement transitive, nous pouvons supposer que les sommets de ce triangle sont $-1, 1$ et ∞ sans changer l'aire. Puis on calcule l'aire de ce triangle. On remarque pour cela que deux de ses cotés sont les demi-droites orthogonales à $\overline{\mathbb{R}}$ passant respectivement par -1 et 1, et que le dernier coté est un arc de cercle centré en 0 d'extrémités -1

et 1 (cf Figure 4). En notant Δ_1 ce triangle, on obtient

$$\begin{aligned}
Aire(\Delta_1) &= \int_{\Delta} \frac{1}{y^2}\, dxdy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy \right) dx \\
&= 2 \int_{0}^{1} \left[\frac{-1}{y} \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y \to \infty} dx \\
&= 2 \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= 2 \left[arcsin(x) \right]_0^1 \\
&= 2\frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

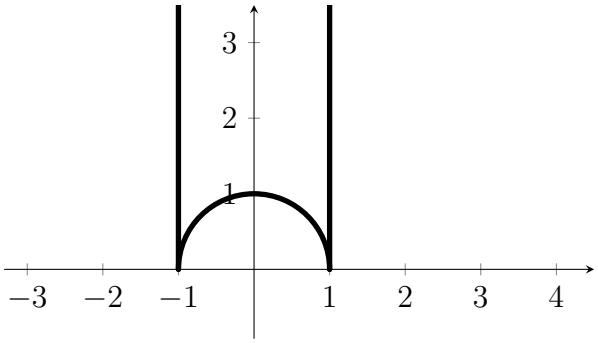

Figure 4: Triangle d'extrémités $-1, 1$ et ∞

Étape 2 : À l'aide d'un calcul similaire, nous trouvons facilement l'aire

d'un triangle Δ_2 dont les angles au sommets valent $0, \alpha$, et β $(\alpha + \beta < \pi)$:

$$\begin{aligned} Aire(\Delta_2) &= \int_{cos(\pi-\alpha)}^{cos(\beta)} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\, dy \right) dx \\ &= [arcsin(x)]_{cos(\pi-\alpha)}^{cos(\beta)} \\ &= arcsin(cos(\beta)) - arcsin(cos(\pi - \alpha)) \\ &= (\frac{\pi}{2} - \beta) - (-\frac{\pi}{2} - \alpha) \\ &= \pi - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Étape 3 : Enfin, si Δ_3 est un triangle dont les angles au sommets A, B et C valent respectivement α, β et γ, alors en prolongeant l'un des côtés, disons AC, jusqu'à l'axe réel, et en notant X le point d'intersection, on note que

$$\begin{aligned} Aire(\Delta_3) = Aire(ABC) &= Aire(ABX) - Aire(CBX) \\ &= \pi - \alpha - (\beta + \delta) - (\pi - \delta - (\pi - \gamma)) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

où δ désigne la mesure de l'angle $\widehat{CBX}$.

□

On en déduit le résultat suivant sur les polygones hyperboliques :

Corollaire 4.2. *L'aire d'un polygone hyperbolique P dont la mesure des angles de ses n sommets est $\alpha_1, ..., \alpha_n$ vaut*

$$Aire(P) = (n-2)\pi - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

Preuve : La preuve repose sur la construction géométrique suivante : étant donné un sommet quelconque, nous pouvons tracer les géodésiques reliant ce sommet aux $(n-3)$ autres sommets de ce polygone. Se créent ainsi $(n-2)$ triangles intérieurs à P. Puisque la somme des angles de ces triangles est la somme des angles de P, il vient que

$$Aire(P) = (n-2)\pi - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

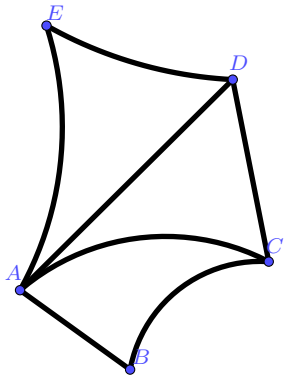

Figure 5: Découpage d'un polygone en triangles

□

Étudions à présent un cas particulier de polygone hyperbolique : les quadrilatères hyperboliques. Une conséquence du résultat précédent est qu'il n'existe pas de carré hyperbolique ie un quadrilatère hyperbolique dont les angles aux sommets valent $\frac{\pi}{2}$. En effet si un tel quadrilatère Q existait, son aire serait nulle :

$$Aire(Q) = 2\pi - 4\frac{\pi}{2} = 0$$

En revanche on peut construire des quadrilatères hyperboliques réguliers (dont les angles aux sommets sont égaux, et dont les cotés ont même longueur), pourvu que l'angle en question soit strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Exemple : Le quadrilatère régulier d'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

On cherche à tracer ce quadrilatère Q dans le disque unité D, en imposant que Q soit centré en 0. Q étant régulier, les sommets sont répartis sur un certain cercle de rayon $R < 1$ à déterminer, et chaque sommet est équidistant de ses deux sommets adjacents. Plaçons donc les sommets en $Re^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ et $Re^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$, et déterminons R.

Nous savons qu'il existe une unique géodésique passant par les points $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Re^{-i\frac{\pi}{4}}$, et que celle-ci est un arc de cercle orthogonal à D. Notons $\Omega = (x_0, 0)$ le centre de ce cercle orthogonal, et r son rayon. Ce cercle C'

s'écrit comme l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$. Un vecteur directeur de la tangente à ce cercle au point $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ est un vecteur orthogonal au gradient de $f : (x, y) \longmapsto (x - x_0)^2 + y^2 - r^2$ en $(Rcos(\frac{\pi}{4}), Rsin(\frac{\pi}{4})) = (\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$. Or la jacobienne de f en ce point est

$$J_{(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})} f = \begin{pmatrix} 2(\frac{R}{\sqrt{2}} - x_0) & 2\frac{R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Cherchons une expression de x_0. Pour cela, remarquons que C' est l'unique cercle orthogonal au cercle unité passant par $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{4}}$, ce qui se traduit par les relations :

$$\begin{cases} x_0^2 = 1 + r^2 \\ \left(\frac{R}{\sqrt{2}} - x_0\right)^2 + \frac{R^2}{2} = r^2 \end{cases}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{R}{\sqrt{2}} - x_0\right)^2 + \frac{R^2}{2} = x_0^2 - 1 \\ \Longrightarrow\ &\frac{R^2}{2} - \frac{Rx_0}{\sqrt{2}} + x_0^2 + \frac{R^2}{2} = x_0^2 - 1 \\ \Longrightarrow\ &R^2 - \frac{x_0}{\sqrt{2}} R + 1 = 0 \\ \Longrightarrow\ &x_0 = \frac{1 + R^2}{\sqrt{2}R} \end{aligned}$$

et donc que

$$J_{(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})} f = \begin{pmatrix} 2(\frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{1+R^2}{\sqrt{2}R}) & 2\frac{R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{R} & \sqrt{2}R \end{pmatrix}.$$

Si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est orthogonal au gradient de f en $(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$, alors

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{R} \\ \sqrt{2}R \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \Longrightarrow\ &\frac{-u}{R} + vR = 0 \\ \Longrightarrow\ &u = vR^2 \end{aligned}$$

et donc $(R^2, 1)$ est un vecteur directeur de la tangente à C' en $(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}})$. De même un vecteur directeur de la tangente au cerle orthogonal au disque unité passant par $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est le vecteur $(1, R^2)$ par symétrie d'axe $y = x$. Ainsi l'angle θ formé par les deux tangentes vérifie

$$\left\langle \begin{pmatrix} R^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ R^2 \end{pmatrix} \right\rangle = cos(\theta) \left\| \begin{pmatrix} R^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ R^2 \end{pmatrix} \right\|_2$$

d'où

$$cos(\theta) = \frac{2R^2}{1 + R^4}$$

puis en imposant $\theta = \frac{\pi}{4}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{2R^2}{1 + R^4} \\ &\implies R^4 - 2\sqrt{2}R^2 + 1 = 0 \\ &\implies R^2 = \sqrt{2} \pm 1 \end{aligned}$$

mais puisque $R \in [0, 1]$, R^2 aussi, donc $R^2 = \sqrt{2} - 1$, et $R = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. On remarquera que R (et donc Q) est constructible à la règle et au compas puisque obtenu à partir de deux extensions de degré 2.

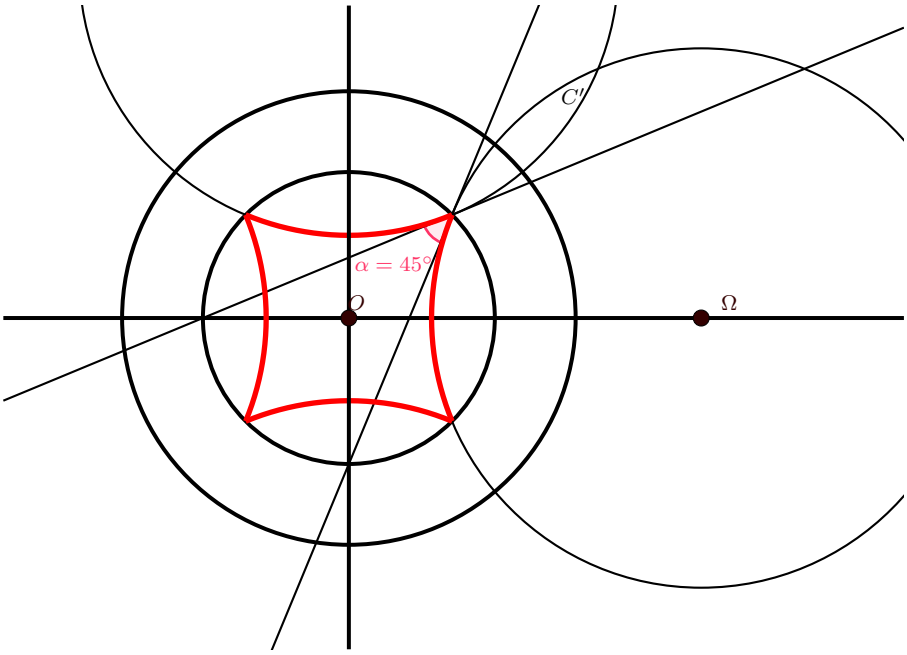

Figure 6: Construction de Q

4.2 Contraintes de pavage

Nous allons maintenant introduire un certain nombre de nouvelles notions pour comprendre comment se traduit mathématiquement l'action de paver. En particulier nous étudierons l'action de certains sous-groupes Γ de $Mob^+(D)$ (resp. $Mob^+(\mathbb{H})$) sur D (resp. $\mathbb{H}$) par homographie :

$$\Gamma \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} : (\gamma, z) \longmapsto \gamma(z)$$

Nous supposerons toujours que cette action vérifie la propriété suivante :

Définition 4.3. On dit que l'action de Γ sur D est proprement discontinue si tout compact C de D ne rencontre qu'un nombre fini de ses images par Γ. Autrement dit, pour tout compact C, $|\{\gamma \in \Gamma,\ \gamma(C) \cap C \neq \varnothing\}| < \infty$.

Remarquons que $\forall z \in D$, $\{z\}$ est compact, et donc que l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(z) = z$ est fini, ie Γ_z (le stablisateur de z) est fini. Γ_z étant un groupe fini, nous allons chercher à l'identifier. Pour cela fixons $z \in D$ et intéressons nous pour $\gamma \in \Gamma \leqslant Mob^+(D)$ à la relation $\gamma(z) = z$ qui le caractérise. Nous sommes amenés à considérer la question suivante : quels sont les points fixes d'une homographie $\gamma \in Mob^+(D)$? Plaçons nous dans un premier temps dans $\mathbb{H}$ où nous savons que les éléments de $Mob^+(\mathbb{H})$ sont les homographies dont les coefficients de la matrice associée sont réels (on suppose toujours cette matrice de déterminant 1). Posons $\forall z \in \mathbb{C}$, $\gamma : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$, et étudions cette condition de point fixe :

$$\begin{aligned} \gamma(z) = z &\implies \frac{az+b}{cz+d} = z \\ &\implies cz^2 + (d-a)z - b = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est $(d-a)^2 + 4cb = (d-a)^2 + 4(ad-1) = (a+d)^2 - 4$. De là on distingue deux cas selon la valeur de $(a+d)^2$ (qui n'est autre que le carré de la trace de la matrice associée à γ) :
- Si $(a+d)^2 \geqslant 4$, le discriminant est positif ou nul, et les points fixes de γ sont réels, donc n'appartiennet pas à $\mathbb{H}$.
- Si $(a+d)^2 < 4$, le discriminant est négatif, et γ admet deux points fixes complexes conjugués. En particulier l'un d'entre eux est élément de $\mathbb{H}$. Puisque $Mob^+(\mathbb{H})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$, nous pouvons supposer que ce point

fixe est i. Nous pouvons maintenant transporter le résultat sur D à l'aide de la transformation de Cayley C, qui envoie i sur 0. Nous avons que 0 est l'unique point fixe de $f := C \circ \gamma \circ C^{-1}$, et que f est un biholomorphisme du disque unité sur lui-même. En particulier, d'après la formule de dérivation des fonctions réciproques,

$$f'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1})(0)} = \frac{1}{f'(0)}$$

et donc $|f'(0)| = 1$. Ainsi le lemme de Schwarz s'applique, et il existe un complexe λ de module 1, tel que $\forall z \in D$, $f(z) = \lambda z$. En écrivant $\lambda = e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, il vient que f est une rotation d'angle θ. En résumé, les éléments de $Mob^+(D)$, qui admettent un point fixe dans D sont conjugués à une rotation du disque unité.

Par suite, chaque élément non trivial du stablisateur Γ_z admet z pour unique point fixe, et donc ceux-ci sont tous conjugués, via un même élément de $Mob^+(D)$, à une rotation du disque unité. En notant $\mathbb{U}$ le groupe des rotations planes, nous avons donc que Γ_z est conjugué à un sous-groupe de $\mathbb{U}$. Mieux encore, Γ_z étant fini, il est conjugué à un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$, plus précisément $\mathbb{U}_m$, où $m = |\Gamma_z|$, puisque les sous-groupes finis de $\mathbb{U}$ sont les groupes des racines de l'unité. En particulier, $\mathbb{U}_m$ étant cyclique, il en va de même pour Γ_z. Nous résumons cela dans la proposition suivante :

Proposition 4.4. *Si l'action de Γ sur D est proprement discontinue, alors le stablisateur Γ_z d'un point $z \in D$ est cyclique isomorphe à $\mathbb{U}_m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.*

On dira par la suite qu'une homographie conjuguée à une rotation est une rotation hyperbolique. Définissons maintenant trois objets importants pour le pavage :

Définition 4.5. On appelle section de l'action $\Gamma \times D \longrightarrow D$ toute partie $S \subset D$ recontrant chaque orbite de l'action en un unique point.

En d'autres termes, une section est un système de repésentants pour le découpage de D en orbites induit par l'action.

Définition 4.6. On dit d'un ouvert P de D qu'il est un domaine fondamental de l'action si :

$$- \text{ il existe une section S telle que } P \subset S \subset \overline{P} \tag{1}$$
$$- \forall \gamma \in \Gamma \backslash \{id\}\,,\ \gamma(P) \cap P = \varnothing \tag{2}$$
$$- D = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{P}). \tag{3}$$

Définition 4.7. On dit que P est un polygone fondamental si P est un domaine fondamental, et si $\overline{P}$ un polygone hyperbolique de D.

Le polygone fondamental est la brique de base des pavages. L'action d'un groupe Γ sur ce polygone fondamental a pour effet de le transporter dans le disque, tout en préservant ses propriétés telles que ses angles aux sommets, la longueur de ses côtés, ou son aire (hyperbolique). Les images de ces polygones pavent alors le disque D. La notion de polygone fondamental étant relative à l'action de Γ, et donc à Γ, il n'est pas toujours facile d'en déterminer. Nous présentons un moyen de construire de tels polygones : étant donné $z \in D$ tel que Γ_z est trivial, on considère

$$D_z(\Gamma) = \{\omega \in D,\ d(\omega, z) \leqslant d(\gamma(\omega), z),\ \forall \gamma \in \Gamma \backslash \{id\}\}\,.$$

Remarquons dans le cas particulier ou Γ est fini que $D_z(\Gamma)$ est l'intersection des demi-plans fermés délimités par les médiatrices hyperboliques entre z et ses images par Γ. On appelle ces domaines des domaines de Dirichlet, on admettra qu'il s'agit de domaines fondamentaux pour l'action de Γ (pour une preuve voir p.171 du livre Hyperbolic Geometry de James W.Anderson).

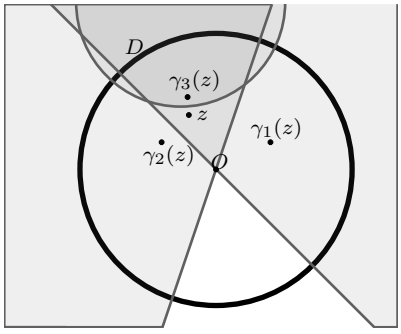

Figure 7: Domaine de Dirichlet pour $\Gamma = \{id, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$

Nous nous intéressons maintenent au cas d'un polygone fondamental P. Plus particulièrement on peut s'intéresser aux sommets de $\overline{P}$: certains sommets de $\overline{P}$ sont envoyés sur d'autres sommets via $\gamma \in \Gamma$.

Définition 4.8. Deux sommets v_1 et v_2 de $\overline{P}$ sont dits congruents s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(v_1) = v_2$. De plus on appellera cycle de sommets les classes de congruences de sommets de $\overline{P}$.

Nous pouvons désormais établir le théorème suivant :

Théorème 4.9. *Soit P un polygone fondamental pour l'action de Γ sur D. On note $(v_1, ..., v_t)$ un cycle de sommets de $\overline{P}$, auquel on associe respectivement $(\theta_1, ..., \theta_t)$, les angles aux sommets. Notons m l'ordre commun des stablisateurs Γ_{v_j} des sommets v_j, $j \in [1, t]$, alors*

$$m \sum_{j=1}^{t} \theta_j = 2\pi.$$

Preuve : Remarquons déjà que les stablisateurs des sommets d'un même cycles sont conjugués entre eux, et par conséquent qu'ils ont même ordre : en effet, si v_1 et $\gamma(v_1)$ sont dans le même cycle, alors

$$h \in \Gamma_{\gamma(v_1)} \Leftrightarrow h \circ \gamma(v_1) = \gamma(v_1) \Leftrightarrow \gamma^{-1} \circ h \circ \gamma(v_1) = v_1 \Leftrightarrow \gamma^{-1} \circ h \circ \gamma \in \Gamma_{v_1}$$

Soit $\gamma_j \in \Gamma$ tel que $\gamma_j(v_j) = v_1$. Observons que si γ est tel que $\gamma(v_j) = v_1$, alors nous avons

$$\gamma(v_j) = v_1 \Leftrightarrow \gamma\gamma_j^{-1}\gamma_j(v_j) = v_1 \Leftrightarrow \gamma\gamma_j^{-1}(v_1) = v_1 \Leftrightarrow \gamma\gamma_j^{-1} \in \Gamma_{v_1} \Leftrightarrow \gamma \in \Gamma_{v_1}\gamma_j$$

ce qui montre qu'il existe exactement m éléments envoyant v_j sur v_1. Or Γ_{v_1} étant cyclique, on a $\Gamma_{v_1} = \langle\rho\rangle$ ou ρ est une rotation hyperbolique d'ordre m. Ainsi les éléments envoyant v_j sur v_1 sont de la forme $\rho^l\gamma_j$, pour $l \in [1, m]$. On en déduit qu'il existe m images de $\overline{P}$ pour lesquelles v_1 est un sommet. En réitérant cette démarche t fois, on montre qu'il y a mt images de $\overline{P}$ pour lesquelles v_1 est un sommet. On montre que ces images sont toutes distinctes.

En effet, soient $k, l \in [1, t]$, et $p, q \in [1, m]$. Si $\rho^p\gamma_k(\overline{P}) = \rho^q\gamma_l(\overline{P})$, en particulier, $\rho^p\gamma_k(P) = \rho^q\gamma_l(P)$, et puisque P est un domaine fondamental, la condition de pavage implique que $\rho^p\gamma_k = \rho^q\gamma_l$. Mais $\rho^p(v_1) = \rho^p\gamma_k(v_k) = \rho^q\gamma_l(v_k)$, et donc puisque $\rho \in \Gamma_{v_1}$, $v_1 = \rho^{p-q}(v_1) = \gamma_l(v_k)$, d'où $v_k = \gamma_l^{-1}(v_1) =$

v_l. Il s'ensuit que $k = l$ et que $p = q$. Les mt images de $\overline{P}$ sont donc toutes distinctes. Or P est un domaine fondamental et donc le pavage remplit D. Le sommet v_1 étant dans un seul cycle de sommets, la somme des angles en v_1 vaut 2π, c'est à dire :

$$2\pi = m(\theta_1 + ... + \theta_t)$$

puisque les éléments de $\Gamma \leqslant Mob^+(D)$ préservent les angles.

□

Ce résultat impose déjà un certain nombre de contraintes sur les cycles de sommets d'un polygone. Dans le cas général, notre polygone fondamental P admet plusieurs cycles de sommets $(c_1, ..., c_k)$. Pour chaque cycle de sommets c_j, notons t_j le nombre de sommets de c_j, et $(\theta_1^j, ..., \theta_{t_j}^j)$ les angles aux sommets $(v_1^j, ..., v_{t_j}^j)$. Notons également m_j l'ordre des stabilisateurs des sommets du cycle c_j. D'après le théorème précédent,

$$\forall j \in [1, k]\,,\ m_j(\theta_1^j + ... + \theta_{t_j}^j) = 2\pi.$$

Or nous avons vu précédemment que les polygones hyperbolique ont des contraintes sur leur aire liées à leurs angles. Plus précisément, en écrivant $\xi_j = \sum_{i=1}^{t_j} \theta_i$ la somme des angles au sein d'un cycle, alors $\sum_{j=1}^{k} \xi_j$ est la somme des angles de ce polygone, et elle vérifie

$$\sum_{j=1}^{k} \xi_j < (n-2)\pi$$

sinon quoi l'aire serait nulle. Comme pour chaque cycle c_j on a $m_j\xi_j = 2\pi$, cette inégalité se réécrit

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{m_j} < \frac{n-2}{2}.$$

4.3 Appariements

Intéressons nous maintenant aux applications qui envoient des côtés de $\overline{P}$ sur des côtés de $\overline{P}$.

Définition 4.10. On appelle appariement une application $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$ telle que $\gamma(\overline{P}) \cap \overline{P}$ est un côté de $\overline{P}$.

Si $c = \gamma(\overline{P}) \cap \overline{P}$ est un coté de $\overline{P}$, alors en composant avec l'inverse de γ, il vient que $\gamma^{-1}(c) = \gamma^{-1}(\overline{P}) \cap \overline{P}$ est aussi un coté de $\overline{P}$. c et $\gamma^{-1}(c)$ sont dits appariés.

Proposition 4.11. *Notons Γ_* le sous-groupe de Γ engendré par les appariements. Alors $\Gamma = \Gamma_*$.*

Preuve : P étant un domaine fondamental,

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\overline{P}) \\ &= \bigcup_{\gamma\in\Gamma_*} \gamma(\overline{P}) \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma\setminus\Gamma_*} \gamma(\overline{P}) \\ &:= A \cup B. \end{aligned}$$

D étant connexe (clairement connexe par arcs), on va montrer $A \cup B$ est une union disjointe de deux fermés, pour conclure que l'un est vide par connexité. Montrons donc que $A \cap B = \varnothing$.

Soit $\alpha \in \Gamma_*$ et $\beta \in \Gamma$. Raisonnons sur les images de $\overline{P}$ par α et β. Déjà remarquons que l'intersection $\alpha(\overline{P}) \cap \beta(\overline{P})$ est soit vide, soit un côté , soit un sommet. Sinon il existe $z \in D$ tel que $z \in \alpha(P) \cap \beta(P)$, et donc $\alpha^{-1}(z) \in P \cap \alpha^{-1}\beta(P)$. D'où $\alpha^{-1}\beta = id$ et $\alpha = \beta$.
- Si $\alpha(\overline{P}) \cap \beta(\overline{P})$ est un côté c, alors $\alpha^{-1}(c) \in \overline{P} \cap \alpha^{-1}\beta(\overline{P})$ est aussi un côté de $\overline{P}$. Donc $\alpha^{-1}\beta$ est un appariement c'est à dire $\alpha^{-1}\beta \in \Gamma_*$, ou encore $\beta \in \alpha\Gamma_* = \Gamma_*$.
- Si $\alpha(\overline{P}) \cap \beta(\overline{P})$ est un sommet s, l'action étant proprement discontinue, nous savons que s est sommet d'un nombre fini d'images de $\overline{P}$ par Γ. $\alpha(\overline{P})$ et $\beta(\overline{P})$ figurent parmi ces images et donc il existe $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \Gamma$ tels que

$$\alpha(\overline{P}) \cap \alpha_1(\overline{P}),\ \alpha_1(\overline{P}) \cap \alpha_2(\overline{P}), ...,\ \alpha_r(\overline{P}) \cap \beta(\overline{P})$$

soient des côtés dont s est l'une des extrémités. Mais puisque $\alpha(\overline{P}) \cap \alpha_1(\overline{P})$ est un côté et que $\alpha \in \Gamma_*$, alors par le point précédent, $\alpha_1 \in \Gamma_*$. De même $\alpha_2 \in \Gamma_*$, et une récurrence immédiate montre que $\beta \in \Gamma_*$.
- Ainsi si $\alpha \in \Gamma_*$ et $\beta \notin \Gamma_*$, d'après le principe du tiers exclu c'est que $\alpha(\overline{P}) \cap \beta(\overline{P}) = \varnothing$.
En particulier $A \cap B = \varnothing$.

Montrons maintenant que A et B sont fermées. Nous savons que chaque image $\gamma(\overline{P})$ est fermée, comme image d'un compact (les polygones sont fermés bornés) par une application continue. Dans notre cas pour monter que A et B sont fermés, il faut montrer qu'une union quelconque d'images de $\gamma(\overline{P})$ est fermée. Posons pour I quelconque $C = \bigcup_{i\in I} \gamma_i(\overline{P})$, et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C convergeant vers z. Montrons que $z \in C$. Soit $\varepsilon > 0$. Le disque hyperbolique $D_\varepsilon = \{\omega \in D,\ d(z,\omega) < \varepsilon\}$ ne rencontre qu'un nombre fini d'images $\gamma(\overline{P})$. En particulier la réunion C' de ces images est fermée comme réunion finie de fermés. Ainsi pour n assez grand, $(z_n) \in C'$, et donc $z \in C$.
D'où A et B fermés.

Par connexité de D, puisque A est non vide ($\overline{P} \in A$), B est vide, ie $\Gamma = \Gamma_*$.

□

Ainsi, les appariements constituent un système de générateurs de Γ. Finalement, pour comprendre le pavage de D par un polygone $\overline{P}$, il faut d'étudier les ordres des stabilisateurs de ses sommets ainsi que la manière avec laquelle Γ permute les côtés. Nous allons par la suite énoncer le théorème de Poincaré qui constitue une réciproque à ces conditions. Pour cela introduisons d'abord certains objets.

4.4 Théorème de Poincaré et exemples

Étant donné un polygone $\overline{P}$ de D à n sommets, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ses côtés orientés (donc $\mathcal{A}$ est de cardinal $2n$). Pour un côté orienté C, C^{-1} désigne le même côté parcouru dans l'autre sens.

On appellera appariement des côtés une involution $\star : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ telle que $\forall C \in \mathcal{A}$, C et C' ont même longueur hyperbolique, et $(\star C)^{-1} = \star(C)^{-1}$. À chaque côté on peut associer l'isométrie de $Mob^+(D)$ vérifiant $\sigma_C(\star C) = C$ et $\sigma_C(\overline{P}) \cap \overline{P} = C$, de sorte que le demi-plan délimité par un côté $\star s$ contenant P soit envoyé sur le demi-plan délimité par s ne contenant pas P. Nous avons par consrtuction que

$$\sigma_{\star C} = \sigma_C^{-1},\ \sigma_{C^{-1}} = \sigma_C$$

Introduisons également l'involution $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},\ C \longmapsto \overline{C}$, qui à un côté orienté C de sommet de départ s associe l'autre côté ayant s pour sommet, avec s comme sommet de départ. Enfin on note $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} : C \longmapsto \overline{\star C}$.

On peut assimiler ψ à une permutation du groupe symétrique de cardinal $2n$, et ainsi décomposer ψ en cycles de supports disjoints.
Pour illustrer l'introduction de toutes ces applications voyons un exemple :
On se donne le triangle hyperbolique suivant :

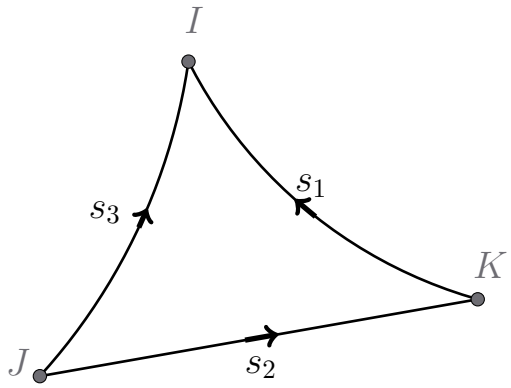

Figure 8: Appariements pour un triangle hyperbolique

On considère l'appariement des côtés suivant : $\star : \begin{cases} s_1 \longmapsto s_3 \\ s_2 \longmapsto s_2 \\ s_3 \longmapsto s_1 \end{cases}$

On cherche à déterminer les cycles de sommets/côtés. Pour cela on s'appuie sur l'application ψ. De la même manière que la décompostion en cycles disjoints d'une permutation σ s'obtient en étudiant les orbites de l'action $\{1, ..., n\} \longmapsto \sigma(\{1, ..., n\})$, nous pouvons déterminer les cycles en se donnant un sommet/côté, puis en itérant ψ sur celui-ci jusqu'à revenir au point de départ.

$$\begin{array}{cccc} \psi(s_1) = \overline{\star s_1} & \psi(s_2) = \overline{\star s_2} & \psi(s_3) = \overline{\star s_3} & \psi(s_2^{-1}) = \overline{\star s_2^{-1}} \\ = \overline{s_3} & = \overline{s_2} & = \overline{s_1} & = \overline{s_2^{-1}} \\ = s_2 & = s_3 & = s_2^{-1} & = s_1 \end{array}$$

De là nous obtenons le cycle de côtés $(s_1, s_2, s_3, s_2^{-1})$ et respectivement le cycle de sommets (K, J, J, K). De même on montre que les deux autres sommets sont points fixes pour ψ.

Établissons le théorème de Poincaré. Notons $A_1^j, ..., A_t^j$ les cotés orientés d'un cycle c_j (ie $\psi(A_k^j) = A_{k+1}^j$). Notons $\sigma_1^j, ..., \sigma_t^j$ les isométries d'appariement associés aux côtés, $S_1^j, ..., S_t^j$ les sommets initiaux des côtés orientés, et $\theta_1^j, ..., \theta_j^t$ les angles aux sommets de ceux-ci.

Théorème 4.12 (Poincaré)**.** *Supposons que pour chaque cycle c_j, il existe $m_j \in \mathbb{N}^*$ de sorte que*

$$\sum_{k=1}^{t} \theta_k^j = \frac{2\pi}{m_j}.$$

Alors pour chaque cycle c_j, $\Sigma_j := \sigma_1^j \sigma_2^j ... \sigma_t^j$ est une rotation hyperbolique d'ordre m_j centrée en A_1^j. L'action de $\Gamma = \langle \{\sigma_C,\ C \in \mathcal{A}\} \rangle$ sur D est proprement discontinue et admet P pour polygone fondamental. De plus, les relations d'appariement entre les isométries d'appariement sont

$$\sigma_{C^{-1}} = \sigma_C, \quad \sigma_{\star C} = \sigma_C^{-1}, \quad \Sigma_j^{m_j} = id$$

pour $C \in \mathcal{A}$.

Revenons à l'exemple du triangle, et étudions le cas général à l'aide du théorème de Poincaré. On se donne un triangle Δ de sommets A, B, C, et on supose qu'il existe $p, q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que les angles aux sommets de A, B et C valent respectivement

$$\theta_A = \frac{\pi}{p},\ \theta_B = \frac{\pi}{q},\ \theta_C = \frac{\pi}{p}.$$

Afin que Δ soit d'aire non nulle, il faut aussi supposer que $\theta_A + \theta_B + \theta_C < \pi$, ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$.

Écrivons $AB = a, BC = b, AC = c$, où tous les côtés sont parcourus dans le sens horaire. On se donne l'appariement trivial suivant :

$$\star : \begin{cases} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \\ c \longmapsto c \end{cases}$$

On vérifie comme précédemment que les cycles de côtés sont $(a, c^{-1}), (b, a^{-1})$ et (c, b^{-1}), et donc chaque sommet est envoyé sur lui-même. Les conditions du théorème de Poincaré sont remplies puisque les entiers p, q et r conviennent.

Déterminons les isométries d'appariement qui réalisent ces derniers. Pour chaque sommet nous cherchons donc σ une rotation hyperbolique centrée en ce sommet, d'ordre l'entier m_j associé au sommet. Chaque côté de Δ se trouve sur une géodésique du disque qui se trouve être un segment de diamètre où un arc de cercle orthogonal. Notons α, β et γ les inversions par rapport aux cercles sur lesquels se trouvent a, b et c. Ces applications préservant les angles, on vérifie que la composée $\gamma\beta$ est une rotation de centre A d'angle $\frac{2\pi}{p}$ dans le sens direct. Plus généralement, on vérifie que à l'aide des propriétés de α, β et γ que l'on a les relations

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = id,\ (\gamma\beta)^p = (\alpha\gamma)^q = (\alpha\beta)^r = id$$

puis que $\sigma_a = \beta\gamma,\ \sigma_b = \alpha\gamma$ et $\sigma_c = \alpha\beta$.

À titre d'exemple, voici le pavage du disque D par des triangles dont les angles aux sommets valent $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{7}$.

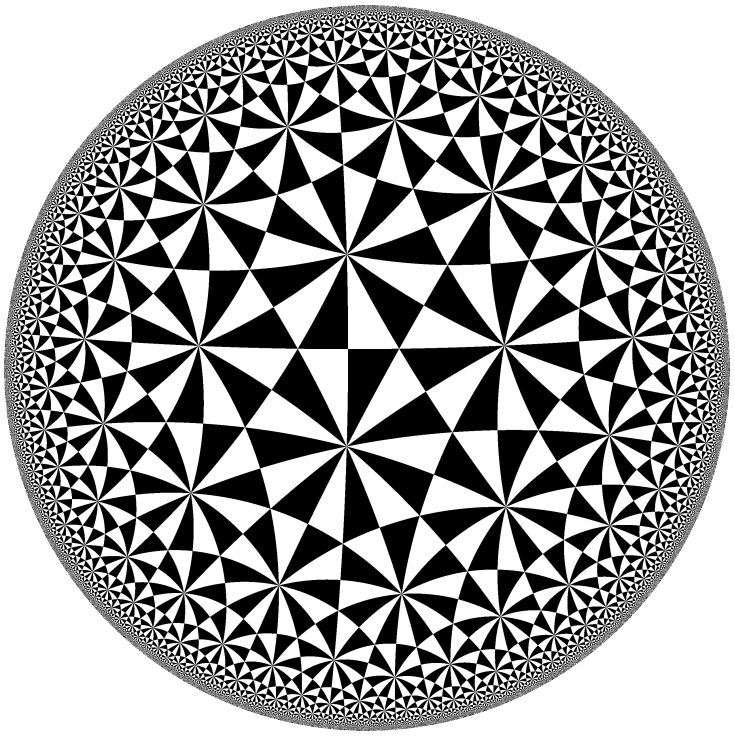

Figure 9: Pavage de D avec le triangle $(2, 3, 7)$