

**CC3 du 14 décembre 2010 - 1h**

Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.  
 Motiver chaque réponse. La qualité de la rédaction est prise en compte.

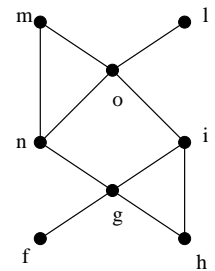
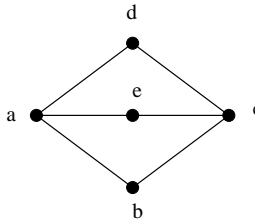
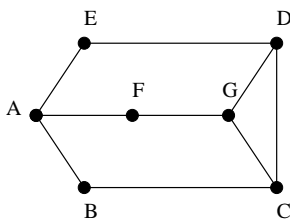
---

**Question 1.**

1. Donner la définition d'un tour eulérien.
2. Donner la définition d'un cycle hamiltonien.

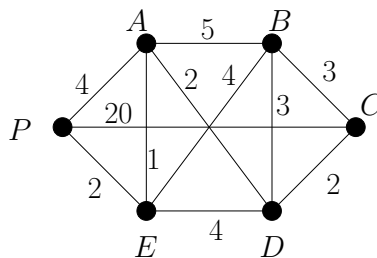
Dire lesquels de graphes suivants contiennent un tour eulérien et/ou un cycle hamiltonien. Dans le cas affirmatif, donner un tel tour ou cycle, dans le cas négatif donner une justification.

3. Le cube de dimension 3.
4. Un arbre avec 6 sommets.
5. Les trois graphes ci-dessous. Indication : pour le premier graphe (celui sur la gauche) analyser le sommet A et ses trois voisins.



**Question 2.**

Dans le graphe ci-dessous, trouver avec justification une route de longueur minimale qui commence et termine à la poste *P* et utilise chaque arête au moins une fois. Donner une route minimale explicite et sa la longueur totale.

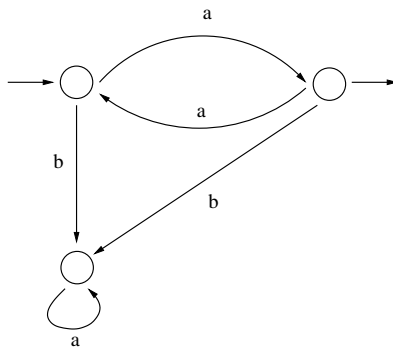


### Question 3.

1. Donner une description en français des langages donnés par les expressions rationnelles suivantes :

$$AA, (AA)^*, (\varepsilon + A)(\varepsilon + A), a^* + b^*, (ab)^* + (ba)^* + b(ab)^* + a(ba)^*.$$

2. Normaliser l'automate  $\mathcal{A}$  en figure.
3. Donner une expression rationnelle pour le langage  $L(\mathcal{A})$  des mots acceptés.



4. Construire un automate qui reconnait le langage  $(aab)^*b$ .

### Question 4.

Soient  $(M, \cdot)$  et  $(N, *)$  deux monoïdes. On rappelle que un morphisme de monoïdes est une application  $\varphi : M \rightarrow N$  telle que

$$\varphi(m_1 \cdot m_2) = \varphi(m_1) * \varphi(m_2) \quad \forall m_1, m_2 \in M$$

et  $\varphi(\varepsilon_M) = \varepsilon_N$ , ( $\varepsilon_M$  l'élément neutre de  $M$ ).

1. Montrer que si  $\varphi$  est injectif alors  $\varphi(m) = \varepsilon_N$  si et seulement si  $m = \varepsilon_M$ .
2. Soient  $A$  l'alphabet  $\{a, b\}$  et  $\varphi : A^* \rightarrow A^*$  le morphisme défini par

$$\varphi(a) = ab \quad \text{et} \quad \varphi(b) = a.$$

3.  $\varphi$  est-il injectif ?
4.  $\varphi$  est-il surjectif ?
5. Calculer  $\varphi^{-1}(abaababa)$ .