Université Claude Bernard Lyon 1

L2 - Graphes, Automates, Langages

Corrigé du CC2 du 3 novembre 2010 - 1h15

Question 1. Soit G un graphe.

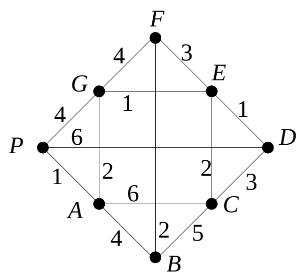
1. Donner la définition d'un graphe recouvrante de G.
2. Montrer que un graphe est connexe si et seulement si contient un graphe recouvrant qui est un arbre.
3. En déduire que si G est connexe avec n sommets, alors G a au moins $n-1$ arêtes.
4. En déduire que si G est connexe avec n sommets et ayant au moins n arêtes possède au moins un cycle.

Proof.

1. Un graphe recouvrant de G est un sous-graphe T de G tel que $V(G) = V(T)$.
2. Soit G un graphe connexe et T un sous-graphe connexe recouvrant de G choisi parmi ceux qui possèdent le nombre minimum d'arêtes. Alors, toute suppression d'arête à T le déconnecte, d'où il résulte que toute arête est séparatrice. Par le théorème fait en cours G est un arbre.
   Réciproquement, si un graphe admet un sous-graphe recouvrant qui est un arbre, deux sommets quelconques du graphe sont toujours reliés par une chaîne de l'arbre, qui est une chaîne du graphe. Le graphe est donc connexe.
3. Par le point 2. G possède un arbre recouvrant T. On a
$$\varepsilon(G) \geq \varepsilon(T) = \nu(T) - 1 = \nu(G) - 1 = n - 1.$$
4. L'arbre recouvrant T a exactement $n-1$ arêtes, donc si on lui ajoute n'importe quelle autre arête $e \in E(G) \setminus E(T)$, on sait que $T + e$ contient un unique cycle. Comme $T + e$ est contenu dans G le résultat est montré.

□

Question 2. On considère le graphe valué G suivant :



1. Donner la définition de distance entre deux sommets u et v dans G.

2. Avec l'algorithme de Dijkstra calculer les distances entre C et les autres sommets du graphe G.

3. Est-ce que le graphe recouvrant obtenu avec cet algorithme est un arbre recouvrant optimal pour G ?

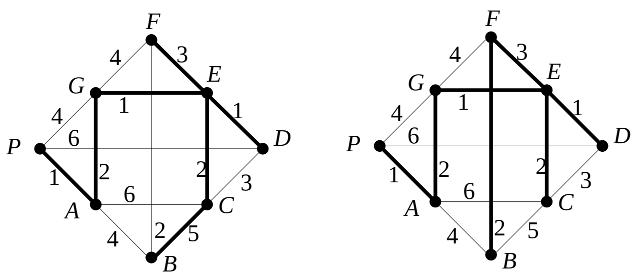
Proof.

1. Soit $w(e)$ le poids d'une arête $e \in E(G)$. Soit $\gamma = e_1 e_2 \dots e_k$ une chaîne de u à v. Le poids d'une chaîne est égal à $w(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$. Alors la distance entre u et v est définie par $d(u, v) := \min \{w(\gamma) \mid \gamma \text{ est une chaîne entre } u \text{ est } v \text{ dans } G\}$.

2. Les distances de C aux autres sommets de G sont données par les nombre en gras sur la table suivante :

A	B	C	D	E	F	G	P
∞	∞	$\mathbf{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
6_C	5_C	$-$	3_C	$\mathbf{2}_C$	∞	∞	∞
6_C	5_C	$-$	3_E	$-$	5_C	$\mathbf{3}_E$	∞
5_G	5_C	$-$	$\mathbf{3}_E$	$-$	5_E	$-$	7_E
$\mathbf{5}_G$	5_C	$-$	$-$	$-$	5_E	$-$	7_E
$-$	$\mathbf{5}_C$	$-$	$-$	$-$	5_E	$-$	6_A
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbf{5}_E$	$-$	6_A
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbf{6}_A$

3. Le graphe recouvrante donné par l'algorithme de Dijkstra est marqué en gras ci-dessous (Figure (a)) et il a un poids de 15. Il n'est pas optimal car on peut facilement en trouver un autre de poids inférieur, par exemple celui en Figure (b) qui a un poids de 12 (pour arriver à B on peut passer par F à la place de C).

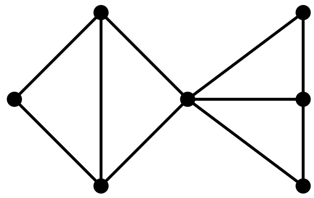


(a) (b)

4. À l'étape i l'algorithme ajoute au graphe T_{i-1} un nouveau sommet v_i et une arête qui le relie à un sommet dans T_{i-1}. Ce sommet aura degré 1 dans T_i, c-à-d, il est une feuille, donc ne formera jamais de cycle dans T_i. On en déduit que T_i est connexe et sans cycle, c-à-d un arbre.

□

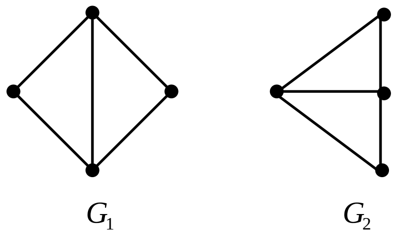
Question 3. On considère le graphe suivant :



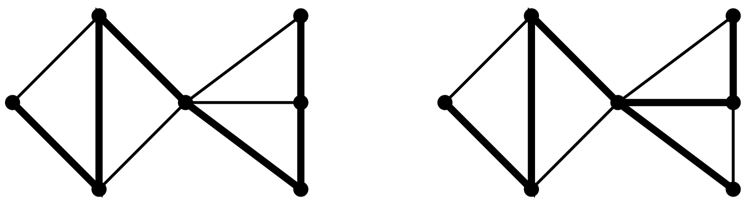
1. Calculer le nombres d'arbres recouvrants $\tau(G)$ de ce graphe.
2. Parmi ces arbres recouvrants en donner deux qui ne sont pas isomorphes entre eux et justifier pourquoi ne le sont pas.

Proof.

1. Le sommet central est un sommet séparateur donc on a $\tau(G) = \tau(G_1) \times \tau(G_2)$. Or, G_1 et G_2 sont isomorphes donc $\tau(G) = \tau(G_1)^2 = 8^2 = 64$, ($\tau(G_1)$ a été calculé en cours).



2. Les deux arbres recouvrants ci-dessous ne sont pas isomorphes car ils n'ont pas la même séquence de degrés.



□