Interpolation de Weierstrass et retombées algébriques

Julian Gestone–Fiorini

Encadré par *Philippe Caldero*

Stage de recherche en L3
Université Claude Bernard Lyon 1
2 Juillet 2026

Table des matières

Motivations

Les polynômes sur $\mathbb{C}[X]$ sont des objets extrêmement contraints, ce qui permet d'obtenir une multitude de théorèmes intéressants sur ces derniers : structure d'anneau euclidien, interpolation de Lagrange, etc.
En parallèle, on étudie en analyse complexe les fonctions holomorphes, fonctions ressemblant à des "polynômes infinis" (cette idée sera re-précisée en partie 1.1). Naturellement, on en vient alors à se demander si l'on pourrait généraliser les résultats sur les polynômes aux fonctions holomorphes.

Un problème majeur est que le cadre des polynômes est trop contraint pour se répercuter "directement" sur les fonctions holomorphes. Pour reprendre un des exemples cités, si le degré est le stathme d'une division euclidienne sur $\mathbb{C}[X]$, ce qui n'est pas raisonnable sur l'anneau des fonctions holomorphes $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, car une fonction holomorphe peut être de degré infini.

Il est donc nécessaire d'effectuer un travail plus poussé pour tenter de généraliser certains de ces résultats aux fonctions holomorphes. Pour cela, après avoir énoncé des faits utiles au reste de ce texte en partie 1, nous chercherons en partie 2 à intuiter avant de démontrer les théorèmes d'annulation et de factorisation de Weierstrass, analogues à "la première étape" de la démonstration du théorème d'interpolation de Lagrange. Nous verrons ensuite le théorème de Mittag-Leffler en partie 3 pour en déduire le théorème d'interpolation de Weierstrass, analogue holomorphe du théorème de Lagrange. En partie 4, on utilise les théorèmes des parties précédentes afin d'obtenir des rudiments d'arithmétique sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Enfin, nous verrons en partie 5 que des limites de l'analogie polynôme $\leftrightarrow$ fonction holomorphe se situent dans un point de vue algébrique, l'anneau $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'étant pas nœthérien.

1 Notions prérequises

1.1 Bases d'analyse complexe

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler des faits de base d'analyse complexe qui seront utiles au cours de ce texte, sans chercher à tous les redémontrer. Pour une preuve des résultats admis au cours de cette sous-partie, on pourra se référer à [1].

Définition 1 (Fonction holomorphe)**.** Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert.
Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* sur Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z_0 \in \Omega$, c'est à dire si :

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^* \to 0} \frac{f(z_0 + h) \ - \ f(z_0)}{h} \ \ existe \ dans \ \mathbb{C}.$$

On notera par la suite $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Les définitions et résultats qui suivent sont *cruciaux* dans l'étude des fonctions holomorphes, car ils permettent d'obtenir un second point de vue sur ces dernières :

Définition 2 (Disque)**.**
Pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, notons $\mathcal{D}(z_0, R)$ le disque ouvert de rayon R et centré en z_0, i.e. :

$$\mathcal{D}(z_0, R) \ := \ \{z \in \mathbb{C} \ t.q. \ |z - z_0| < R\}$$

Définition 3 (Fonction développable en série entière)**.**
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite développable en série entière en $z_0 \in \Omega$ s'il existe un rayon $R > 0$ et des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexes tels que :

$$\forall h \in \mathcal{D}(0, R), \quad f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n$$

Notons qu'une fonction développable en série entière en z_0 sur $\mathcal{D}(z_0, R)$ est holomorphe sur $\mathcal{D}(z_0, R)$.

Définition 4 (Fonction analytique)**.**
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est développable en série entière en chaque $z_0 \in \Omega$.

Théorème 5 (Caractérisation des fonctions holomorphes)**.** *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.*
f est holomorphe sur Ω si et seulement si elle est analytique sur Ω.
En particulier, une fonction holomorphe est infiniment dérivable.

Théorème 6 (Expansion du disque de convergence)**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique.
Pour tout $z_0 \in \Omega$, f est alors développable en série entière en z_0 sur $\mathcal{D}(z_0, R)$, avec :

$$R \ := \ \sup\{r > 0 \ t.q. \ \mathcal{D}(z_0, R) \subseteq \Omega\}$$

Afin de simplifier la rédaction des preuves, nous considèrerons par la suite uniquement le cas $\Omega = \mathbb{C}$. Notons toutefois que la majorité des résultats énoncés dans ce texte restent valables sur Ω un ouvert connexe quelconque.

Une conséquence des théorèmes 5 et 6 est que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est développable en série entière en 0, avec un développement valable sur $\mathbb{C}$ tout entier. Cela revient à dire que f s'écrit sous la forme :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Autrement dit, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ est *exactement* un "polynôme de degré infini", ce que justifie les attentes de la partie Motivations.

Pour démontrer le théorème 23 d'annulation de Weierstrass , il nous faudra parler d'intégration complexe :

Définition 7 (Intégrale complexe sur un segment)**.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Posons :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) \ := \ (1 - t) \cdot a + t \cdot b$$

On définit alors l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f \ := \ \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Théorème 8 (fondamental de l'analyse)**.**
La règle de la chaîne appliquée à $f \circ \gamma$ permet d'étendre le théorème fondamental de l'analyse aux fonctions d'une variable complexe, à savoir que si F est une primitive holomorphe de f sur $[a, b] \subset \mathbb{C}$, alors :

$$\int_a^b f \ = \ F(b) \ - \ F(a)$$

Pour le théorème 24 de factorisation de Weierstrass, nous aurons besoin des théorèmes suivants :

Lemme 9 (Existence d'une primitive)**.**
Soit $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, f admet une primitive holomorphe.

Remarque. Ce résultat, ainsi que ses corollaires, sont les seuls résultats de ce texte invalides en regardant des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe quelconque : il faudrait prendre Ω *simplement connexe* pour conserver ce lemme.

Théorème 10. *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ne s'annulant en aucun point.*
Il existe alors $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$f = e^g$$

Démonstration.
Comme f ne s'annule en aucun point, le quotient $\frac{f'}{f}$ est bien défini et holomorphe sur $\mathbb{C}$ par quotient de fonctions holomorphes.
Par le lemme 9, on peut alors considérer $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ une primitive holomorphe de $\frac{f'}{f}$.
$f \cdot e^{-g}$ est dérivable, et sa dérivée vaut :

$$f' \cdot e^{-g} \ + \ f \cdot (-g')e^{-g} \ = \ \left(f' - \frac{f' \cdot f}{f}\right) e^{-g} \ = \ 0.$$

$\mathbb{C}$ étant connexe, alors $f \cdot e^{-g}$ est alors constante. Notons C cette constante (non nulle), et c un logarithme de C. Alors :

$$f \ = \ e^g \cdot e^c \ = \ e^{g+c}$$

$g + c$ étant holomorphe par somme de fonctions holomorphes, on obtient le résultat souhaité. □

1.2 Suites, parties sans point d'accumulation

Dans l'étude des polynômes, l'étude des racines est primordiale pour connaître un polynôme : en particulier un polynôme s'annulant sur une partie infinie est nul. Si ce résultat est bien sûr faux pour les fonctions holomorphes (par exemple le sinus admet un nombre infini de zéros), nous allons voir que l'on a toutefois un résultat analogue pour une partie *sans point d'accumulation.*

Définition 11 (Suite, partie sans point d'accumulation)**.**
Une partie $A \subset \mathbb{C}$ est dite *sans point d'accumulation* si pour chaque $\alpha \in A$, il existe un rayon $r_\alpha > 0$ tel que :

$$\mathcal{D}(\alpha, r_\alpha) \cap A \ = \ \{\alpha\}$$

On dit qu'une suite est dite *sans point d'accumulation* si elle n'admet pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}$.

Remarque. Une partie finie est sans point d'accumulation.

Le théorème suivant donne une première idée de structure de ces parties, ce qui sera notamment utile pour démontrer le théorème 25 de Mittag-Leffler.

Théorème 12. *Une partie sans point d'accumulation est au plus dénombrable.*
En particulier, une partie sans point d'accumulation infinie s'identifie à une suite sans point d'accumulation.

Démonstration. Considérons $A \subset \mathbb{C}$ sans point d'accumulation.
On va chercher à injecter A dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.
Pour chaque $\alpha \in A$, posons $r_\alpha > 0$ tel que :

$$\mathcal{D}(\alpha, r_\alpha) \cap A \ = \ \{\alpha\}$$

$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{C}$, il existe donc $q_\alpha \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap \mathcal{D}(\alpha, r_\alpha/2))$.
Considérons alors $q : \ A \to \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, \ \alpha \mapsto q_\alpha$, et montrons que c'est une injection :
Si $q_\alpha = q_\beta$, alors :

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| \ &= \ |\alpha - q_\alpha \ - \ (\beta - q_\beta)| \\ &\leqslant \ |\alpha - q_\alpha| \ + \ |\beta - q_\beta| \\ &< \ \frac{r_\alpha}{2} \ + \ \frac{r_\beta}{2} \\ &< \ \max(r_\alpha, r_\beta) \end{aligned}$$

D'où $\alpha = \beta$. Alors, A s'injecte dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, dénombrable, donc A est au plus dénombrable. □

Lemme 13. *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sans point d'accumulation, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$$

Démonstration. Raisonnons par contraposée, en supposant $\lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq +\infty$.
En reprenant la définition de la limite, cela revient à dire qu'il existe une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ de (a_n) bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ entraîne que cette sous-suite admet donc une valeur d'adhérence α, qui est a fortiori une valeur d'adhérence de la suite (a_n). Cette suite n'est donc pas sans point d'accumulation. □

Les résultats suivants énoncent des résultats analogues au cas polynomial :

Théorème 14 (Existence d'une multiplicité)**.** *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique non nulle.*
Pour tout $a \in \mathbb{C}$, il existe un entier m tel que $f^{(m)}(a) \neq 0$.
On appelle multiplicité de a le plus petit entier m vérifiant cette propriété.

Démonstration. Notons X l'ensemble des points ne vérifiant pas cette propriété, c'est à dire :

$$X := \{a \in \mathbb{C} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(a) = 0\}$$

D'une part, X se réécrit comme :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(f^{(n)}\right)^{-1}(\{a\})}_{\text{fermé de } \mathbb{C}}$$

X est donc un fermé de $\mathbb{C}$, car c'est une intersection dénombrable de fermés.
De plus, pour $a \in X$, f étant analytique elle est développable en série entière en a. Il existe donc $r > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(a,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{=0} (z-a)^n = 0$$

f est donc nulle sur l'ouvert $\mathcal{D}(a,r)$, d'où $\mathcal{D}(a,r) \subset X$. X est donc un ouvert de $\mathbb{C}$.
Ainsi, X est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ étant connexe, alors $X = \varnothing$ ou $X = \mathbb{C}$.
f étant non nulle, alors $X \neq \mathbb{C}$, d'où $X = \varnothing$, c'est à dire le résultat souhaité. □

Corollaire 15 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'accumulant en un point $a \in \mathbb{C}$ et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f(a_n) = 0$$

Alors, f est nulle sur tout $\mathbb{C}$.
Autrement dit, une fonction holomorphe non nulle ne s'annule que sur un ensemble sans point d'accumulation.

Enfin, pour le théorème 25 de Mittag-Leffler, on a besoin d'introduire la notion de fonction méromorphe :

Définition 16 (Fonction méromorphe et singularités)**.**
Une fonction f est dite *méromorphe* sur $\mathbb{C}$ s'il existe $A \subset \mathbb{C}$ sans point d'accumulation telle que f soit bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash A$, et qu'en chaque $\alpha \in A$, on soit dans l'un des deux cas suivants :

- f se prolonge en α en une fonction holomorphe en α. On dit alors que f est *faussement singularisée* en α.
- $\lim_{z\to\alpha} |f(z)| = +\infty$. On dit alors que α est un *pôle* de f.

De façon générale, les éléments de A sont appelés *singularités* de f.

1.3 Produits infinis et critère de Cauchy

Pour la partie 2, nous aurons besoin de parler de produits infinis, ainsi que du critère de Cauchy pour la démonstration du théorème 23.

Définition 17 (Produit infini)**.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
On dit que le produit $\prod u_n$ converge si $\left(\prod_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\geqslant 0}$ converge. On note $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite.
On dit que le produit de fonctions $\prod f_n$ converge simplement si pour chaque $z \in \mathbb{C}$, $\prod f_n(z)$ converge.

Théorème 18 (Un critère de convergence de produit)**.** *Supposons que $\sum u_n$ converge absolument. Alors, le produit $\prod(1+u_n)$ converge, et vaut 0 si et seulement si l'un des u_n vaut -1.*

Démonstration.
Car $\sum u_n$ converge, $\lim u_n = 0$. En particulier, un existe n_0 un entier quel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| < 1/2$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $1+u_n \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. En notant log le logarithme principal, on a de plus pour $|u| \leqslant 1/2$:

$$|\log'(1+u)| = \left|\frac{1}{1+u}\right| \leqslant \left|\frac{1}{1-|u|}\right| \leqslant \left|\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right| = 2$$

Ainsi par inégalité des accroissements finis, pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} |\log(1+u_n) - \log(1)| &\leqslant 2 \cdot |1+u_n-1| \\ \textit{i.e.}\quad |\log(1+u_n)| &\leqslant 2|u_n| \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant n_0} \log(1+u_n)$ converge (absolument) vers $\ell \in \mathbb{C}$, or :

$$\exp\left(\sum_{n=n_0}^{N} \log(1+u_n)\right) = \prod_{n=n_0}^{N} \exp(\log(1+u_n)) = \prod_{n=n_0}^{N} (1+u_n)$$

Ainsi, $\prod(1+u_n)$ converge vers :

$$\underbrace{\prod_{n=0}^{n_0-1} (1+u_n)}_{\text{peut s'annuler}} \cdot \underbrace{\exp(\ell)}_{\neq 0}$$

Montrons alors que le produit $\prod_{n=0}^{n_0-1}(1+u_n)$ est nul ssi l'un des u_n vaut -1.
D'une part, si ce produit est nul, alors l'un des u_n pour $n < n_0$ vaut -1.
D'autre part, si ce produit est non nul, alors pour chaque $n < n_0$, $u_n \neq -1$. Or, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \neq 1$ donc $u_n \neq -1$. De là, aucun des u_n vaut -1. □

Théorème 19 (Holomorphie d'un produit infini)**.**
Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes. Supposons de plus que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
Alors, le produit de fonctions $\prod(1+f_n)$ converge simplement vers une limite elle-même holomorphe, et s'annulant en $z \in \mathbb{C}$ ssi l'un des $f_n(z)$ vaut -1.

Démonstration.
Car $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact, pour chaque $z \in \mathbb{C}$, $\sum f_n(z)$ converge absolument. Par le théorème 18, on en déduit que $\prod(1+f_n)$ converge simplement, et que sa limite s'annule bien en $z \in \mathbb{C}$ ssi l'un des $f_n(z)$ vaut -1.
Il ne reste qu'à démontrer que cette limite est holomorphe. En regardant $\log(1+f_n)$ sur un voisinage compact bien choisi de $z_0 \in \mathbb{C}$, on déduit d'un raisonnement analogue à la preuve du théorème précédent que $\sum \log(1+f_n)$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant normalement, et donc est elle-même holomorphe en z_0. En composant par l'exponentielle, on en déduit que le produit infini est holomorphe en z_0, et ce pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$. □

Proposition 20 (Critère de Cauchy "simplifié"). *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *telle que :*

$$\sqrt[n]{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Alors,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Démonstration.
On va en fait démontrer un résultat bien plus fort que celui attendu, à savoir que la série entière $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence infini.
Fixons donc $r > 0$. Il existe alors n_0 un entier tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} 0 \;\leqslant\; \sqrt[n]{|u_n|} \;&\leqslant\; \frac{1}{r} \\ d'où \;\; |u_n| r^n \;&\leqslant\; 1 \end{aligned}$$

La suite $(u_n r^n)_{n\leqslant 0}$ est donc bornée pour tout $r > 0$, donc $\sum u_n z^n$ a un rayon de convergence infini.
En particulier, $\sum u_n \cdot 1^n$ converge, d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

2 Factorisation de Weierstrass

Nous allons chercher à caractériser les fonctions holomorphes s'annulant sur un ensemble bien choisi. Pour comprendre le lien entre ce travail et le problème de l'interpolation, rappelons une preuve (brève) du théorème d'interpolation polynomial, dit de Lagrange :
Si l'on cherche les polynômes dont on a fixé les valeurs en $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ distincts, on pose alors le morphisme d'algèbres :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1), ..., P(a_n)) \end{array} \right.$$

Pour rendre φ bijectif (ce qui correspond à résoudre le problème de l'interpolation), il faut étudier la structure de $\ker\varphi$. Pour cela, on vérifie en premier lieu que $P := \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ est dans ce noyau, puis que $\ker\varphi$ est bien engendré par ce polynôme (en tant qu'idéal).
De là, car P est de degré n (ce qui pose problème pour des fonctions holomorphes) et que les a_n sont distincts, l'espace vectoriel quotient $\mathbb{C}/_{\ker\varphi}$ est de dimension finie n. L'application induite par passage au quotient de φ est donc une injection linéaire, et donc bijective par un argument de dimension.
On peut par un argument similaire déterminer les polynômes s'annulant en les a_i avec multiplicités respectives $m_i \in \mathbb{N}$, en regardant cette fois-ci le polynôme $\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^{m_i}$.

Dans cette partie, nous cherchons donc à mimer "la première étape" du raisonnement ci dessus, à savoir construire une fonction holomorphe s'annulant sur un ensemble prescrit (parties 2.1 et 2.2), puis s'intéresser à la structure des fonctions s'annulant sur ledit ensemble (partie 2.3)

2.1 Premières idées naïves

Munissons nous de complexes $a_1, ..., a_N$ distincts.
Un polynôme qui s'annule exactement en les a_n est :

$$P(z) \;=\; \prod_{n=1}^{N}(z - a_n) \tag{1}$$

Un polynôme étant holomorphe, on a directement trouvé une fonction holomorphe s'annulant en les $a_1, ..., a_N$.
Or une fonction holomorphe non nulle peut, contrairement aux polynômes, s'annuler en une infinité de points, à condition que ces derniers soient isolés (conformément au théorème 15).
Cherchons alors à construire une fonction s'annulant non plus en un nombre fini de points, mais en

une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de complexes sans points d'accumulation.
Par analogie à (1), on se demande alors si en posant :

$$f(z) \ := \ \prod_{n=1}^{+\infty}(z-a_n)$$

La fonction f s'annule-t-elle exactement en *tous les* a_n ?
Prenons l'exemple $a_n = n^2$. Cela donne :

$$f(z) \ = \ \prod_{n=1}^{+\infty}(z-n^2)$$

Or, ce produit infini ne converge pas, on ne peut donc même pas définir rigoureusement une telle fonction f... Pour palier ce problème, on peut être tentés de diviser par a_n, à condition qu'il soit non nul, afin de se ramener à un produit infini dont le terme général tend vers 0 en $+\infty$, en posant :

$$f(z) \ := \ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$$

L'exemple précédent donne alors :

$$f(z) \ = \ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n^2}\right)$$

Qui est bien défini selon le théorème 18 car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
Cette méthode est-elle alors valable pour toute suite (a_n) ? Il s'avère que non : en effet, si l'on prend $a_n = n$, on obtient :

$$f(z) \ = \ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)$$

Or ce produit infini diverge, (par exemple en $z = 1$, un équivalent de la série harmonique nous permet de montrer que ce produit tend vers $+\infty$)

2.2 Un candidat "plus sérieux" : la fonction E_p

On a constaté ci-dessus qu'une analogie avec le cas polynomial n'était pas toujours concluante, faute de convergence du produit infini. On peut alors essayer de "forcer la convergence" en perturbant le terme général du produit infini.
Reprenons l'exemple qui a "échoué" tout à l'heure, i.e. $a_n = n$. Pour tenter de compenser la décroissance "inverse" trop faible du terme $1/n$, on peut tenter de multiplier par une exponentielle, qui a en plus l'avantage de ne pas s'annuler, par exemple en regardant :

$$f(z) = := \ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot\exp\left(\frac{z}{n}\right)$$

On a alors :

$$\left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot\exp\left(\frac{z}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right) = 1-\left(\frac{z}{n}\right)^2$$

Ce qui est bien le terme général d'un produit convergent.
Plus généralement, en utilisant le fait que :

$$(1-u)\cdot\exp\left(u+u^2+...+u^{p-1}\right) \underset{u\to 0}{\sim} (1-u)(1+u+u^2+...+u^{p-1}) = 1-u^p$$

On arrive à "alourdir" l'exposant sur u, afin d'espérer obtenir une convergence.
On verra par la suite qu'il vaut mieux voir le facteur équivalent de l'exponentielle $(1+u+u^2+...+u^{p-1})$ comme *une dérivée*. Cela nous amène donc aux définitions suivantes :

Définition 21. Pour $z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\begin{aligned} W_p(z) &:= z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + \frac{z^p}{p} = \sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k} \\ E_p(z) &:= (1-z)\exp\left(W_p(z)\right) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + \frac{z^p}{p}\right) \end{aligned}$$

Le lemme suivant amène alors un *contrôle* sur la fonction E_p, qui permettra par la suite de définir correctement un produit interpolateur :

Lemme 22. *Soit $p \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leqslant 1$. Alors :*

$$|1 - E_p(z)| \leqslant |z|^{p+1}$$

Démonstration.
Notons que d'une part, E_p est bien holomorphe, et d'autre part que $E_p(0) = 1$. Alors :

$$1 - E_p(z) = -\int_0^z E_p'(u)du$$

Or, par les formules de dérivation usuelles, pour $u \in [0, z]$:

$$\begin{aligned} E_p'(u) &= -\exp\left(W_p(u)\right) + \underbrace{(1-u)(1+u+...+u^{p-1})}_{=1-u^p}\exp\left(W_p(u)\right) \\ &= -u^p \exp\left(W_p(u)\right) \end{aligned}$$

L'expression de $W_p(u)$ et un développement en série entière de l'exponentielle donnent alors un développement en série entière de $u^p \exp\left(W_p(u)\right)$ dont les coefficients sont réels positifs, et nuls si d'ordre strictement inférieur à p. Notons alors :

$$-E_p'(u) = \sum_{k=p}^{+\infty} b_k u^k$$

Une permutation série-intégrale nous donne donc :

$$\begin{aligned} 1 - E_p(z) &= \sum_{k=p}^{+\infty} \int_0^z b_k u^k du \\ &= \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} z^{k+1} \end{aligned}$$

Posons alors $\varphi(z) := \frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$ la fonction que l'on cherche à borner. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{z^{p+1}} \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{b_k}{k+1} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \quad avec\ c_k := \frac{b_k}{k+1} \geqslant 0 \\ \Rightarrow |\varphi(z)| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{|c_k|}_{\geqslant 0}\underbrace{|z|^k}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \varphi(1) \end{aligned}$$

Or, $\varphi(1) = \frac{1-0}{1^{p+1}} = 1$. On obtient ainsi le résultat souhaité. □

2.3 Le théorème de factorisation de Weierstrass

Nous cherchons désormais à construire une fonction holomorphe s'annulant sur une partie sans point d'accumulation A infinie (le cas fini étant traité par l'interpolation de Lagrange), avec multiplicités choisies à l'avance.
Pour cela, posons $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Pour choisir une multiplicité m de $\alpha \in A$, on suppose que ce nombre α apparait m fois dans la suite (a_n). Par exemple, si l'on cherche à construire une fonction s'annulant en les entiers naturels avec multiplicité 2, on va définir la suite (a_n) en posant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{2n} & := \ n \\ a_{2n+1} & := \ n \end{cases}$$

De là, pour $p \in \mathbb{N}$, $(E_p(z/\alpha))^m$ s'annule *exactement* en α avec multiplicité m. Notons toutefois que cette expression n'est définie que si α est non nul. Pour $\alpha = 0$, nous verrons que remplacer $(E_p(z/\alpha))^m$ par z^m suffit.
En suivant cette idée, on obtient alors le théorème suivant :

Théorème 23 ("d'annulation" de Weierstrass)**.**
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls qui ne s'accumule pas.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note m_n le nombre de fois que le complexe a_n apparaît dans cette suite (ces entiers sont bien finis car la suite ne s'accumule pas).
Munissons nous de plus de $m \in \mathbb{N}$ une multiplicité "souhaitée" pour 0.
Il existe alors une suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers telle que la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^m \cdot \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \end{array} \right.$$

est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, et s'annule exactement en les a_n avec multiplicité m_n, et en 0 avec multiplicité m.

Démonstration.
Fixons $z \in \mathcal{D}(0,R)$, avec $R > 0$. Pour $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leqslant 1$, et donc par le lemme 22,

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \ \leqslant \ \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1}$$

De là, en prenant $p_n := n-1$, on obtient :

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \ \leqslant \ \left|\frac{z}{a_n}\right|^{n} \ \leqslant \ \underbrace{\left|\frac{R}{a_n}\right|^{n}}_{\substack{\text{indépendant} \\ \text{de } z}}$$

Car $\left|\frac{R}{a_n}\right| \to 0$, par critère de Cauchy (proposition 20), alors $\left|\frac{R}{a_n}\right|^n \to 0$, donc par comparaison $\sum \left|1 - E_{p_n}(\frac{z}{a_n})\right|$ converge normalement sur $\mathcal{D}(0,R)$
Ce travail étant vrai sur tout disque de la forme $\mathcal{D}(0,R)$, $\sum \left|1 - E_{p_n}(\frac{z}{a_n})\right|$ converge donc sur tout compact de $\mathbb{C}$.
Alors, par le théorème 19 on obtient une suite (p_n) telle qu'en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) \ := \ z^m \cdot \prod_{n=0}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

La fonction f est bien définie, holomorphe et s'annule exactement en les a_i.
Concernant la multiplicité de ces zéros, au vu de la définition de f, a_i est un zéro de f d'ordre *au*

moins m_i, car chaque facteur $E_{p_n}(\frac{z}{a_i})$ fait sortir un facteur $(1-\frac{z}{a_i})$, et il y en a m_i, et le quotient :

$$\frac{f(z)}{(1-\frac{z}{a_i})^{m_i}}$$

est un produit de $(1-\frac{z}{a_j})$, avec $a_j \neq a_i$, et d'exponentielles, tous non nuls en $z=a_i$.
Ainsi, a_i est bien un zéro de f d'ordre m_i.
Un travail similaire permet de conclure que 0 est une racine d'ordre m de f. □

Enfin, de même que pour le cas polynomial, on déduit aisément du théorème 23 la structure des fonctions holomorphes s'annulant exactement en les a_n :

Corollaire 24 (Factorisation de Weierstrass)**.**
Soit $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ s'annulant exactement en les a_i avec multiplicité <u>exactement</u> m_i, et en 0 avec multiplicité m.
Il existe alors $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$h \;=\; f \cdot e^g, \quad \textit{avec } f \textit{ définie comme dans le théorème 23.}$$

Démonstration.
Notons que par construction, la fonction $\frac{h}{f}$ est méromorphe, et non nulle en dehors des a_n et de 0.
h étant holomorphe, elle est développable en série entière au voisinage de a_i, notons :

$$h(z) \;=\; \sum_{n=m_i}^{+\infty} b_{n-m_i}(z-a_i)^n \;=\; (z-a_i)^{m_i} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a_i)^n$$

Ainsi, on a :

$$\frac{h(z)}{f(z)} \;=\; {a_i}^{m_i} \underbrace{\frac{(1-\frac{z}{a_i})^{m_i}}{f(z)}}_{\substack{\text{Faussement}\\ \text{singularisé}\\ \text{en } z=a_i}} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a_i)^n}_{\substack{\text{vaut } b_0 \neq 0\\ \text{en } z=a_i}}$$

Notons que le terme $\frac{(1-\frac{z}{a_i})^{m_i}}{f(z)}$ est bien faussement singularisé en $z=a_i$ car $f(z)$ est exactement un produit de $\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{m_i}$ avec des facteurs $\left(1-\frac{z}{a_j}\right)$, $j \neq i$, non nuls au voisinage de a_i, et d'exponentielles, non nulles.
On conclut donc que le quotient $\frac{h}{f}$ admet une fausse singularité en chaque a_i, et ne s'y annule pas.
De même, un développement en série entière de h en 0 montre que $\frac{h}{f}$ admet une fausse singularité en chaque 0, et ne s'y annule pas.
Ainsi, la fonction $\frac{h}{f}$ est en réalité holomorphe sans zéro, donc par le théorème 10 il existe donc $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\frac{h}{f} \;=\; e^g$$

□

Remarque. L'utilisation du théorème 10 limite ici les ouverts sur lesquels ont pourrait travailler, au vu de la remarque en partie 1.1 .
Notons toutefois qu'en remplaçant e^g par une fonction holomorphe non nulle, l'utilisation de ce théorème n'est plus nécessaire, ce qui permet quand même d'obtenir un théorème de factorisation légèrement plus faible.

Il peut être intéressant de noter que certains résultats utiles en analyse complexe sont en fait des factorisations de Weierstrass, où l'on a calculé le facteur e^g.
Par exemple, on a le développement eulérien du sinus (où ici $e^g = 1$) :

$$\sin(z) \;=\; z \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\pi^2 n^2}\right)$$

Permettant entre autres de calculer $\zeta(2)$ en développant ce produit pour retrouver une série entière.
Un exemple plus "complexe" est le développement de l'inverse de la fonction Γ sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$, où le facteur e^g ne vaut pas 1, et les facteurs $E_p(z/a_n)$ ne valent pas $(1-z/a_n)$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \;=\; z\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\cdot e^{\gamma z}, \quad \text{avec } \gamma \text{ la constante d'Euler.}$$

3 Interpolation par des fonctions holomorphes

De même que dans le cas polynomial, nous allons utiliser le théorème d'annulation de Weierstrass, pouvant être vu comme un théorème d'interpolation "restreint en zéro" (au sens où l'on force des valeurs à valoir uniquement zéro), pour en déduire un théorème d'interpolation général.
Pour cela, nous aurons besoin dans un premier temps du théorème 25 de Mittag-Leffler, pouvant lui aussi être vu comme un théorème d'interpolation "restreinte" : il permet de construire une fonction méromorphe dont les pôles, et le comportement local en ces pôles, sont choisis au préalable. Cela fera l'objet de la sous-partie 3.1.
Nous verrons ensuite dans la sous-partie 3.2 que ces deux théorèmes d'interpolation restreinte, couplés à des astuces du type :

$$a\cdot\underbrace{(z-\alpha)}_{\substack{\text{admet un}\\ \text{zéro en}\\ z=\alpha}}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)}_{\substack{\text{admet}\\ \text{un pôle}\\ \text{en } z=\alpha}} \;=\underbrace{a}_{\substack{\text{vaut } a\\ \text{en } z=\alpha}} \tag{2}$$

Permettent ici de construire une fonction valant $a\in\mathbb{C}$ quelconque en un point α préalablement choisi, et plus généralement d'obtenir un théorème d'interpolation "global".

3.1 Une première forme d'interpolation : Le théorème de Mittag-Leffler

Théorème 25 (de Mittag-Leffler)**.** *Soit $A\subset\mathbb{C}$ sans point d'accumulation.*
Pour chaque $\alpha\in A$, on se munit de $P_\alpha\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P_\alpha(0)=0$ (i.e. P_α n'a pas de coefficient constant.)
Il existe alors $f\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$ et des fonctions $h_\alpha\in\mathcal{M}(\mathbb{C})$ holomorphes au voisinage de α telles que :

$$\forall\alpha\in A,\ z\in\mathbb{C}\setminus A,\ f(z) \;=\; P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) \;+\; h_\alpha(z)$$

Idée de la démonstration.
Nous verrons dans quelques instants que lorsque A est finie, il suffit de poser :

$$f(z) \;:=\; \sum_{\alpha\in A} P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$$

pour obtenir le résultat souhaité.
Nous allons chercher à mimer cette idée dans le cas où A est infinie. Le théorème 12 nous permet déjà de dire que A est dénombrable, écrivons alors $A=:\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$, avec les a_n tous distincts. Posons de plus $P_n := P_{a_n}$ pour plus de lisibilité.
Pour mimer le cas fini, on aimerait poser :

$$f(z) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z), \quad \text{avec } f_n(z) := P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$$

Or, cette série ne converge pas nécessairement, par exemple si $a_n := n$ et $P_n(X) := X$, cela donnerait :

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z-n}$$

Qui n'est pas correctement défini.
Pour palier ce problème, une idée est de *perturber* le terme général de cette série par une fonction g_n holomorphe, de manière à garantir la convergence de la série $\sum(f_n - g_n)$ tout en gardant une certaine régularité. C'est le travail que l'on réalise ci-dessous.

Démonstration.
Cas A finie.
Supposons A finie. Posons, pour $z \in \mathbb{C}\backslash A$,

$$f(z) \ := \ \sum_{\alpha \in A} P_\alpha \left(\frac{1}{z-\alpha} \right)$$

On a alors, pour $\alpha_0 \in A$,

$$f(z) \ := \ P_{\alpha_0} \left(\frac{1}{z-\alpha_0} \right) \ + \ \underbrace{\sum_{\alpha \neq \alpha_0} P_\alpha \left(\frac{1}{z-\alpha} \right)}_{\substack{\text{holomorphe au} \\ \text{voisinage de } \alpha_0 \text{ car} \\ A \text{ est sans point} \\ \text{d'accumulation}}}$$

D'où le théorème dans ce cas.

Cas A infinie.
Supposons A infinie, et reprenons les notations ci-dessus. Quitte à réordonner les éléments de A, supposons de plus la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
Fixons pour l'instant $n \in \mathbb{N}$. Sur le disque $\mathcal{D}(0, |a_n|)$, f_n est holomorphe, et donc développable en série entière. Notons alors, pour $z \in \mathcal{D}(0, |a_n|)$:

$$f_n(z) \ =: \ \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(n) z^k$$

De plus, sur le plus petit disque $\mathcal{D}(0, |a_n|/2)$, cette série entière converge *uniformément*, ce qui a l'avantage de préserver l'holomorphie. Cela revient à dire qu'il existe $c(n)$ un entier tel que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0, |a_n|/2), \quad \left| f_n(z) \ - \ \sum_{k=0}^{c(n)} b_k(n) z^k \right| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n} \ \ \textit{sur } \mathcal{D}(0, |a_n|/2) \, . \tag{3}$$

Posons alors :

$$g_n(z) \ := \ \sum_{k=0}^{c(n)} b_k(n) z^k$$

On cherche désormais à montrer que la série $\sum(f_n - g_n)$ est bien convergente, et de somme holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash A$.
Pour cela, montrons que cette série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash A$.
Fixons $R > 0$ un rayon quelconque. Car $|a_n| \to +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $R \leqslant |a_n|/2$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, f_n est holomorphe sur $\mathcal{D}(0, R)$, et par (3), pour tout $z \in \mathcal{D}(0, R)$,

$$|f_n(z) \ - \ g_n(z)| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}$$

Ainsi, $\sum_{n\geqslant n_0}(f_n - g_n)$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathcal{D}(0, R)$ vers une limite $\widetilde{f}$ holomorphe.

En particulier, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0}(f_n - g_n)$ est alors convergente sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash A$. Elle converge donc sur $\mathbb{C}\backslash A$ vers une limite f holomorphe.

Il ne reste qu'à montrer que f vérifie la conclusion du théorème : fixons $\alpha_k \in A$ et $R > |a_k|$ un rayon tel que $a_k \in \mathcal{D}(0,R)$.
Il existe alors $n_0 > k$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $R \leqslant |a_n|/2$. De là, pour $z \in \mathcal{D}(0,R)$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(f_n(z)-g_n(z)) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1}(f_n(z)-g_n(z)) + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{+\infty}(f_n(z)-g_n(z))}_{\widetilde{f}(z)} \\ &= P_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - \underbrace{g_k(z) + \sum_{\substack{n=0\\n\neq k}}^{n_0-1}\left(P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)-g_n(z)\right)}_{\text{holomorphe au voisinage de } a_k} + \underbrace{\widetilde{f}(z)}_{\text{holomorphe}} \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

3.2 Le théorème d'interpolation de Weierstrass

Nous avons désormais tous les outils permettant de démontrer le théorème d'interpolation général suivant :

Théorème 26 (d'interpolation de Weierstrass)**.** *Soit $A \subset \mathbb{C}$ sans point d'accumulation.*
Pour chaque $\alpha \in A$, on se munit de $m_\alpha \in \mathbb{N}$ une multiplicité, et pour tout $k \in [\![0, m_\alpha - 1]\!]$, de $\omega_{\alpha,k} \in \mathbb{C}$ une valeur d'interpolation.
Il existe alors $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall \alpha \in A, k \in [\![0, m_\alpha - 1]\!],\ f^{(k)}(\alpha) = \omega_{\alpha,k} \cdot k!$$

Démonstration.
Pour $\alpha \in A$, posons :

$$Q_\alpha(z) := \omega_{\alpha,0} + \omega_{\alpha,1}(z-\alpha) + ... + \omega_{\alpha,m_\alpha-1}(z-\alpha)^{m_\alpha-1} = \sum_{k=0}^{m_\alpha-1}\omega_{\alpha,k}(z-\alpha)^k$$

Notons que pour un $\alpha_0 \in A$ fixé, le polynôme Q_{α_0} vérifie la conclusion du théorème d'interpolation, mais seulement pour α_0... Plus généralement, toute fonction holomorphe congrue à Q_{α_0} modulo $(z \mapsto (z-\alpha_0)^{m_{\alpha_0}})$ vérifiera la conclusion en α_0. On cherche donc à construire la fonction f de manière à avoir :

$$\forall \alpha \in A,\ z \in \mathbb{C},\ f(z) = Q_\alpha(z) + (z-\alpha)^{m_\alpha} \cdot h_\alpha(z) \tag{4}$$

Où les h_α sont des fonctions holomorphes.
Pour cela, par théorème d'annulation de Weierstrass, posons $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall \alpha \in A, k \in [\![0, m_\alpha - 1]\!],\ g^{(k)}(\alpha) = 0$$

Afin de réinvestir l'exemple "d'interpolation" de l'égalité (2), on aimerait avoir un polynôme P_α de degré m_α tel que $P_\alpha(0) = 0$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{\alpha\},\ g(z) \cdot P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) = Q_\alpha(z) + (z-\alpha)^{m_\alpha} \cdot H_\alpha(z) \tag{5}$$

Où les H_α sont des fonctions holomorphes.
Cherchons alors un tel polynôme $P_\alpha(X)\sum_{k=1}^{m} b_k X^k$, avec $m := m_\alpha$.
Pour obtenir une simplification des facteurs développons g en série entière au voisinage de α :

$$g(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} c_k(z-\alpha)^k \text{ avec } c_m \text{ non nul.}$$

En écrivant ces sommes avec des pointillés, cela donne :

$$\begin{aligned} g(z)\cdot P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) &= \left(c_m(z-\alpha)^m + c_{m+1}(z-\alpha)^{m+1} + ...\right)\left(\frac{b_m}{(z-\alpha)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z-\alpha)^{m-1}} + ... + \frac{b_1}{(z-\alpha)}\right) \\ &= c_m b_m \ + \ (c_m b_{m-1} + c_{m+1}b_m)(z-\alpha) \ + \ ... \ + \ (z-\alpha)^m \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} v_k (z-\alpha)^k}_{\substack{:= \ H_\alpha(z) \\ \text{reste de la} \\ \text{série entière}}} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient alors :

$$g(z)\cdot P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) \ = \ \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} u_k (z-\alpha)^k}_{= \ Q_\alpha(z) ?} \ + (z-\alpha)^{m_\alpha} H_\alpha(z), \quad avec \ u_k := \sum_{p=0}^{k} c_{m+p} b_{m-p}$$

On cherche donc à avoir $u_k = \omega_{\alpha,k}$. Pour cela, il suffit alors de poser, car c_m est non nul :

$$\begin{cases} b_m & := \ \frac{1}{c_m}\omega_{\alpha,0} \\ b_{m-1} & := \ \frac{1}{c_m}\left(\omega_{\alpha,1} - c_{m+1}b_m\right) \\ ... & \\ b_{m-k} & := \ \frac{1}{c_m}\left(\omega_{\alpha,k} - \sum_{p=1}^{k} c_{m+p}b_{m-p}\right) \end{cases}$$

On a ainsi construit un polynôme P_α vérifiant (5).
Le théorème de Mittag-Leffler nous donne alors l'existence d'une fonction φ méromorphe telle que :

$$\forall \alpha \in A, \ z \in \mathbb{C}\backslash A, \ \varphi(z) \ = \ P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) \ + \ h_\alpha(z)$$

Soit $f := g\cdot\varphi$, holomorphe sur $\mathbb{C}$ car admettant de fausses singularités sur A. Alors , pour tout $\alpha \in A$, $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z)\cdot P_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}\right) \ + \ g(z)h_\alpha(z) \\ &= Q_\alpha(z) \ + \ (z-\alpha)^{m_\alpha}\cdot H_\alpha \ + \ g(z)h_\alpha(z) \quad par \ (5) \end{aligned}$$

Enfin, car α est un zéro de g d'ordre m_α, on en déduit que $g(z)h_\alpha(z)$ se factorise sous la forme $(z-\alpha)^{m_\alpha}\widetilde{h}_\alpha(z)$, ce qui montre que f est de la forme (4).

□

4 Arithmétique dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$

Dans cette partie, nous allons utiliser les théorèmes démontrés précédemment afin d'obtenir des rudiments d'arithmétique sur l'anneau $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, s'apparentant à ceux obtenus dans un anneau principal. Nous allons d'abord en partie 4.1 utiliser les théorèmes d'annulation et de factorisation issus de la partie 2 pour de reformuler la divisibilité en notions "analytiques", puis obtenir une notion de pgcd et ppcm pour des fonctions holomorphes, de manière analogue à $\mathbb{C}[X]$.
Nous allons ensuite en partie 4.2 utiliser un résultat analytique plus fort, à savoir le théorème d'interpolation de la partie 3, pour obtenir - de manière assez étonnante - un résultat algébrique plus fort, à savoir un théorème de Bézout.

Rappelons que dans un anneau A quelconque, on dit que M est un pgcd de a et b si d'une part M divise a et b, et d'autre part si tout diviseur d de a et d divise aussi M.
De même, on dit que m est un ppcm de a et b si d'une part m est un multiple de a et b, et d'autre part si tout multiple de a et b est aussi un multiple de m.

4.1 Divisibilité, PGCD et PPCM

Définition 27 (Divisibilité dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$)**.** Soient $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
On dit alors que f divise g, noté $f|g$, si il existe $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$f = g \cdot h$$

C'est à dire que le quotient $\frac{f}{g}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Nous allons reformuler cette définition en terme de zéros, afin d'utiliser les théorèmes que l'on vient de démontrer :

Lemme 28 (Caractérisation de la divisibilité)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.*
Notons $\{a_i, i \in I\}$ l'ensemble des zéros de g, chacun de multiplicité m_i. Alors :

$$f|g \;\Leftrightarrow\; \forall i \in I, k \in [\![0, m_i - 1]\!], \quad f^{(k)}(a_i) \;=\; 0 \tag{6}$$

Autrement dit, tous les zéros de g de multiplicité m sont des zéros de f de multiplicité <u>au moins</u> m.

Démonstration. D'une part, si $f|g$, la formule de Leibniz nous donne bien (6).
D'autre part, si f vérifie (6), un raisonnement analogue à la preuve du théorème 24 montre que le quotient $\frac{f}{g}$ est méromorphe avec des fausses singularités en tout ses pôles, donc prolongeable en une fonction holomorphe. □

De là, le théorème d'annulation de Weierstrass permet ainsi de déterminer des pgcd et ppcm de fonctions holomorphes, via le théorème suivant :

Théorème 29 (pgcd et ppcm dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.*
Quitte à considérer des zéros de multiplicité nulle, on peut considérer que f et g ont les mêmes zéros. Notons les a_i, pour $i \in I$. Pour chaque zéro a_i, notons $m_i(f)$, (resp. $m_i(g)$) sa multiplicité en tant que zéro de f (resp. en tant que zéro de g). Alors :

1) *Une annulatrice de Weierstrass en les a_i avec multiplicité $d_i := \max(m_i(f), m_i(g))$ est un ppcm de f et g.*
2) *Une annulatrice de Weierstrass en les a_i avec multiplicité $\delta_i := \min(m_i(f), m_i(g))$ est un pgcd de f et g.*

Démonstration.

1) Soit u l'annulatrice en les a_i avec multiplicité d_i.
   D'une part, par le lemme 28, u est bien multiple de f et g.
   D'autre part, si $\widetilde{u}$ est multiple de f et g, nécessairement $\widetilde{u}$ s'annule en les a_i avec multiplicité *au moins* $m_i(f) + m_i(g) \geqslant d_i$. Alors, par le lemme 28 $\widetilde{u}$ est bien multiple de u.
2) Soit v l'annulatrice en les a_i avec multiplicité δ_i.
   D'une part, par le lemme 28, v divise bien f et g.
   D'autre part, si $\widetilde{v}$ divise f et g, alors ses seuls zéros éventuels sont les a_i, avec multiplicité *au plus* δ_i. De là, par le lemme 28, $\widetilde{v}$ divise alors v.

□

4.2 Une identité de Bézout sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$

Théorème 30 (Identité de Bézout sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$)**.**
Soient $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telles que $pgcd(f, g) = 1$, i.e. f et g n'ont pas de zéros en commun.
Il existe alors $u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telles que :

$$u \cdot f + v \cdot g \;=\; 1$$

Démonstration.
Notons au préalable $A \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des zéros de f (nécessairement sans point d'accumulation), et m_α la multiplicité de $\alpha \in A$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned} & \exists u, v \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \ t.q. : \quad u \cdot f \ + \ v \cdot g \ = \ 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \exists v \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \ t.q. : \qquad f | (1 - vg) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists v \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \ t.q. : \quad \forall \alpha \in A, k \in [\![0, m_\alpha - 1]\!], (1 - vg)^{(k)} \ = \ 0 \end{aligned}$$

Pour montrer l'existence d'une telle fonction v fixons temporairement $\alpha \in A$.
Obtenir cette condition pour $k = 0$ revient à chercher si :

$$1 - v(\alpha)g(\alpha) \ = \ 0 \Leftrightarrow v(\alpha) \ = \ \frac{1}{g(\alpha)}$$

Notons que ceci est bien défini car α est un zéro de f, et donc $g(\alpha) \neq 0$ car $pgcd(f, g) = 1$.
Pour $k = 1$, obtenir la condition revient à chercher si :

$$v'(\alpha)g(\alpha) + v(\alpha)g'(\alpha) \ = \ 0 \Leftrightarrow v'(\alpha) \ = \ \frac{-1}{g(\alpha)} v(\alpha)g'(\alpha)$$

Et plus généralement, pour $k \geq 1$ quelconque, la formule de Leibniz nous donne que cette condition est vérifiée si :

$$v^{(k)}(\alpha)g(\alpha) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} v^{(i)}(\alpha)g^{(k-i)} \ = \ 0 \ \Leftrightarrow v^{(k)}(\alpha) \ = \ \frac{-1}{g(\alpha)} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} v^{(i)}(\alpha) \cdot g^{(k-i)}(\alpha)$$

Ainsi, on définit par "récurrence" $(\omega_{\alpha,k})_{0 \leqslant k \leqslant m_\alpha - 1}$ selon la formule :

$$\begin{cases} \omega_{\alpha,0} & := \ \dfrac{1}{g(\alpha)} \\ \omega_{\alpha,k} & := \ \dfrac{-1}{g(\alpha)} \cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \omega_{\alpha,i} \cdot g^{(k-i)}(\alpha), \quad \textit{pour } k \in [\![1, m_\alpha - 1]\!], \end{cases}$$

Le théorème d'interpolation de Weierstrass nous donne l'existence de $v \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall \alpha \in A, k \in [\![0, m_\alpha - 1]\!], \ v^{(k)}(\alpha) \ = \ \omega_{\alpha,k}$$

Qui vérifie bien la condition souhaitée. □

5 Comparaison entre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[X]$

Nous avons pu voir jusqu'à présent un lien profond entre polynômes et fonctions holomorphes, aussi bien dans leur écriture (une combinaison linéaire de monômes, finie pour l'un et infinie pour l'autre) que dans les résultats obtenus sur ces objets.
Nous allons désormais chercher les limites de cette analogie, sous un angle principalement algébrique. Pour cela, nous rappellerons en partie 5.1 quelques faits algébriques élémentaires sur l'anneau $\mathbb{C}[X]$. En partie 5.2, nous verrons que la plupart de ces résultats sont faux sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, car cet anneau n'est pas nœthérien.
Enfin, la partie 5.3 servira de synthèse des éléments de ce texte, à la lueur d'une analogie polynôme $\leftrightarrow$ fonction holomorphe.

Pour accentuer cette analogie entre polynôme et fonction holomorphe tout en simplifiant les notations, de même que l'on note X l'indéterminée d'un polynôme, on notera z la fonction identité de $\mathbb{C}$, avec laquelle on réalisera du calcul formel. Par exemple, $3z^2$ désigne ici la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui à un complexe associe le triple de son carré.

5.1 Un anneau de référence : L'anneau $\mathbb{C}[X]$

L'objectif de cette partie est uniquement de rappeler certains faits déjà bien connus sur l'anneau $\mathbb{C}[X]$ afin de pouvoir comparer cet anneau à $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dans la partie suivante. Pour cette raison, de même qu'en partie 1.1, on se permettra de ne pas démontrer une partie des résultats présentés. Pour une preuve de ces derniers, on pourra se référer à [3].

Proposition 31. *L'ensemble $\mathbb{C}[X]$, muni de l'addition et de la multiplication usuelle, est un anneau intègre.*

Démonstration. Nous allons juste démontrer l'intégrité de cet anneau.
Soient P et Q des polynômes tels que $PQ = 0$. Alors,

$$\deg(PQ) \;=\; \deg(P) + \deg(Q) \;=\; \deg(0) \;=\; -\infty$$

D'où $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(Q) = -\infty$, c'est à dire $P = 0$ ou $Q = 0$. □

Lemme 32 (Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$)**.**
Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont, à multiplication par un polynôme inversible près, les polynômes de la forme :

$$X - a, \quad avec\ a\ \in \mathbb{C}$$

Démonstration.
D'une part, montrons que $X - a$ est irréductible. Pour cela, posons :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array} \right.$$

φ est clairement un morphisme d'anneaux surjectif, et son noyau est l'idéal $(X - a)$. Par théorème d'isomorphisme, on a donc :

$$\mathbb{C}[X]/_{(X-a)} \;\cong\; \mathbb{C}$$

En particulier, $\mathbb{C}[X]/_{(X-a)}$ est un corps. $X - a$ est donc premier, donc irréductible.
D'autre part, si P est un polynôme irréductible, il est nécessairement non constant (un polynôme constant est soit nul, soit inversible). Le théorème de D'Alembert-Gauss nous donne l'existence de $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.
Alors, $X - a$ divise P, qui s'écrit donc sous la forme :

$$P \;=\; \underbrace{(X-a)}_{\substack{\text{non} \\ \text{inversible}}} \cdot \underbrace{Q}_{\substack{\text{nécéssairement} \\ \text{inversible} \\ \text{car } P \\ \text{est irré-} \\ \text{ductible}}}$$

D'où le résultat. □

Définition 33 (Vocabulaire sur les anneaux)**.** Un anneau intègre A est dit :

- *principal* si tout idéal de A est engendré par un seul élement.
- *factoriel* si tout élément non nul s'écrit, à multiplication par un inversible près, de façon unique comme produit d'un nombre fini d'éléments irréductibles.
- *nœthérien* s'il n'admet pas de suite infinie d'idéaux strictement croissante (au sens de l'inclusion).

Théorème 34 (division euclidienne sur $\mathbb{C}[X]$)**.** *Le degré est le stathme d'une division euclidienne sur $\mathbb{C}[X]$, c'est à dire que pour $A, B \in \mathbb{C}[X]$, il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ et :*

$$A \;=\; B \cdot Q + R$$

Corollaire 35.
$\mathbb{C}[X]$ *est principal.*

Démonstration. Soit I un idéal non nul de $\mathbb{C}[X]$. Posons :

$$d \ := \ \min\Big\{\deg P,\ P \in I\backslash\{0\}\Big\}$$

Il existe donc $P \in I$ de degré d. Ainsi, $(P) \subset I$.
Réciproquement, soit $Q \in I$. Par division euclidienne, il existe donc $A, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\deg(R) < \deg(P) = d$

$$\begin{aligned} Q &= P \cdot A + R \\ d'\text{où}: \quad R &= \underbrace{Q}_{\in I} - \underbrace{P \cdot A}_{\in I} \end{aligned}$$

D'où $R \in I$ et $\deg(R) < d$. Par définition de d, alors $R = 0$, d'où $Q \in (P)$, et ainsi :

$$I \ = \ (P).$$

□

Proposition 36.
Un anneau principal est nœthérien et factoriel. En particulier, $\mathbb{C}[X]$ *l'est.*

Démonstration. Seul le caractère nœthérien sera démontré.
Envisageons une suite $I_0 \leqslant I_1 \leqslant ... \leqslant I_n \leqslant ... \leqslant A$ croissante d'idéaux.
Alors, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un idéal de A, principal. Il existe donc $a \in \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ tel que :

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n \ = \ (a)$$

De plus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a \in I_{n_0}$. De là,

$$(a) \leqslant I_{n_0} \leqslant I_{n_0+1} \leqslant ... \leqslant \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \ = \ (a)$$

D'où, pour tout $n \geqslant n_0$, $I_n = (a)$. En particulier, la suite d'idéaux (I_n) est stationnaire, donc ne peut être strictement croissante.
Une suite strictement croissante étant bien sûr croissante, on a alors bien montré qu'il ne pouvait exister de suite infinie d'idéaux strictement croissante dans A. □

De plus, on peut obtenir très rapidement les résultats de la partie 4 dans un anneau principal :

Proposition 37 (pgcd, ppcm dans un anneau principal)**.** *Soit A un anneau principal, $a, b \in A$. Alors :*

1) *Un générateur de l'idéal (a, b) est un pgcd de a et b.*
2) *Un générateur de l'idéal $(a) \cap (b)$ est un ppcm de a et b.*

Remarque. Dans un anneau intègre, on sait que $(x) = (y)$ ssi x et y sont égaux à multiplication par un inversible près.
De là, on en déduit que dans un anneau principal, il y a unicité du pgcd/ppcm à multiplicité par un inversible près.

Théorème 38 (Identité de Bézout sur un anneau principal)**.**
Soit A un anneau principal, $a, b \in A$ tels que $pgcd(a, b) = 1$.
Il existe alors $u, v \in A$ tels que :

$$a \cdot u + b \cdot v \ = \ 1$$

Démonstration.
Si $pgcd(a, b) = 1$, alors $1 \in (a, b)$, or les éléments de (a, b) sont de la forme $a \cdot u + b \cdot v$, d'où le résultat. □

5.2 $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ en tant qu'anneau

Proposition 39. *L'ensemble $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, muni de l'addition et du produit usuels, est un anneau commutatif intègre.*

Démonstration. Seule l'intégrité de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ est à démontrer.

Pour cela, prenons $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telles que $f \cdot g = 0$, et g non nulle.
Il existe alors $a \in \mathbb{C}$ tel que $g(a) \neq 0$, et par principe des zéros isolés, $r > 0$ tel que g soit non nulle sur $\mathcal{D}(a, r)$. En particulier, pour tout $n \geqslant 2$ entier,

$$f\left(a + \frac{r}{n}\right) \;=\; 0$$

Or, la suite $(a + \frac{r}{n})_{n\geqslant 2}$ s'accumulant vers a, par principe des zéros isolés f est nulle. □

Remarque. Notons que cette démonstration n'a rien à voir avec celle du cas polynomial (proposition 31).
Cela n'est pas étonnant, on utilisait la notion de degré, bien moins pratique dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, car il n'est pas toujours fini.

Lemme 40 (Irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$)**.**
Les irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ sont, à multiplication par une fonction holomorphe inversible près, exactement les fonctions de la forme :

$$z - a, \quad \textit{avec } a \in \mathbb{C}$$

Remarque. On entend ici par "fonction inversible" une fonction inversible au sens du produit (ce qui revient à dire qu'elle ne s'annule pas), et non pas au sens de la composition.

Démonstration.
Procédons comme pour $\mathbb{C}[X]$. D'une part, pour montrer que $z - a$ est irréductible, on pose :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$$

φ un morphisme d'anneaux surjectif. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est divisible par $z - a$, alors on a bien $f(a) = 0$.
Réciproquement, si $f(a) = 0$, par factorisation de Weierstrass (théorème 24), $z - a$ divise bien f.
On a donc bien $\ker \varphi = (z - a)$, et par les mêmes arguments que pour le lemme 31, $z - a$ est irréductible, et même premier.

D'autre part, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ est irréductible, alors f n'est pas inversible.Il existe donc $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = 0$. De là, $z - a$ divise f, et il existe donc $g \in \mathbb{C}$ telle que :

$$P \;=\; \underbrace{(z-a)}_{\substack{\text{non in-}\\ \text{versible}}} \cdot \underbrace{g}_{\substack{\text{nécéssairement}\\ \text{inversible}\\ \text{car } P \text{ est}\\ \text{irréduc-}\\ \text{tible}}}$$

D'où le résultat. □

Remarque. Cette fois-ci, la preuve est quasiment identique à $\mathbb{C}[X]$, à l'exception près que pour dire qu'un élément irréductible admet un zéro, une preuve nécessite le théorème de D'Alembert-Gauss, et l'autre une caractérisation des fonctions inversibles.

Au vu du travail en partie 4 et des théorèmes 37 et 38, $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ a toutes les raisons d'être principal. Pourtant, on a le théorème :

Théorème 41. *$\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est pas principal.*

Démonstration.
Pour $k \geq 1$ un entier, posons :

$$f_k \ := \ \prod_{n=k}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{k^2}\right)$$

Et regardons I l'idéal engendré par tous les f_k. Supposons qu'il admette un générateur g.
Il existe alors des fonctions $u_1, ...u_k$ telles que :

$$g \ = \ \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot f_i$$

D'une part, car $f_{k+1} \in I = (g)$, $g | f_{k+1}$. Or $f_{k+1}(k^2) \neq 0$, donc par le lemme 28 $g(k^2) \neq 0$.
D'autre part, pour chaque $i \leq k$, $f_k(k^2) = 0$, d'où $g(k^2) = 0$.
Il y a contradiction. □

Il en vient alors à se demander si l'anneau $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ serait au moins factoriel ou nœthérien. Nous allons voir que ce n'est pas non plus le cas :

Théorème 42. *Contrairement à $\mathbb{C}[X]$, l'anneau $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ n'est ni factoriel, ni nœthérien.*

Démonstration. Pour le caractère non-factoriel de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, posons :

$$f \ := \ \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

La fonction f est alors bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$, et de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (z - n^2) | f$$

Par le lemme 40, on en déduit que f admet un nombre infini de diviseurs irréductibles. Si $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ était factoriel, alors cette infinité de divisieurs seraient présents dans l'unique factorisation de f, et donc f ne pourrait s'écrire en un produit fini d'irréductibles, ce qui contredit la définition d'anneau factoriel.

Pour le caractère non nœthérien de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, posons pour $k \geqslant 1$ un entier :

$$f_k \ := \ \prod_{n=k}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

Et considérons $I_k := (f_k)$ l'idéal engendré par f_k.
Pour $k \geqslant 1$, on a la relation :

$$f_k \ = \ \left(1 - \frac{z}{k^2}\right) \cdot f_{k+1}$$

D'où $f_{k+1} | f_k$. De plus car $(1 - \frac{z}{k^2})$ n'est pas inversible, $f_k \nmid f_{k+1}$. Cela se traduit en termes d'idéaux par :

$$I_k \ \subsetneq \ I_{k+1}$$

On a ainsi construit une suite strictement croissante d'idéaux, ce qui contredit la définition d'un anneau nœthérien. □

5.3 Synthèse

Nous allons désormais reprendre tout ce qui a été vu précédemment, pour tenter de répondre (partiellement) à la question posée au début de ce texte : peut-on généraliser les propriétés sur les polynômes aux fonctions holomorphes ?

D'un point de vue analytique, nous avons pu constater à plusieurs reprises une correspondance parfaite entre des énoncés sur des polynômes et des énoncés sur des fonctions holomorphes, à condition

de remplacer "partie finie" par "partie sans point d'accumulation". En particulier, il y a correspondance entre l'interpolation de Lagrange (expliquée en début de partie 2) et l'interpolation de Weierstrass, fruit des parties 2 et 3.

D'un point de vue algébrique, il y a plus de choses à remarquer.
Tout d'abord concernant les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Les lemmes 32 et 40 montrent qu'ils sont de la même "forme algébrique", à savoir :

$$\begin{cases} (z-a)\cdot(\textit{une fonction inversible}) & \textit{dans } \mathcal{H}(\mathbb{C}). \\ (X-a)\cdot(\textit{un polynôme inversible}) & \textit{dans } \mathbb{C}[X]. \end{cases}$$

Notons toutefois que cela ne signifie pas que ce sont exactement les mêmes, car il y a bien plus de fonctions holomorphes inversibles que de polynômes inversibles. Par exemple,

$$\begin{cases} (z-1)\cdot e^z & \text{est irréductible dans } \mathcal{H}(\mathbb{C}). \\ (X-1)\cdot e^X & \text{n'a pas de sens dans } \mathbb{C}[X]. \end{cases}$$

Enfin, les structures d'anneaux sur $\mathbb{C}[X]$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ diffèrent sur certains points. Le degré est le stathme d'une division euclidienne sur $\mathbb{C}[X]$, ce qui permet de démontrer que cet anneau est - entre autres - principal, factoriel et nœthérien.
Or, on a montré en partie 5.2 que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ ne vérifiait aucune de ces propriétés.
Pourtant, on a vu en partie 4 que l'on pouvait quand même :

- Définir un pgcd/ppcm dans $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, ce qui se fait habituellement à l'aide d'une structure d'anneau principal (ou éventuellement factoriel.)
- Obtenir un théorème de Bézout sur $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, qui se démontre habituellement à l'aide d'une structure d'anneau principal.

Notons aussi que les irréductibles de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ sont exactement ses éléments premiers, bien que cet anneau ne soit pas principal.

Ainsi, cette "proximité" entre fonction holomorphe et polynôme nous aura permis d'exhiber un exemple d'anneau exotique, ne vérifiant pas les "propriétés utiles" des anneaux les plus simples à étudier, mais certaines de leurs conclusions.

Enfin, notons qu'à travers ce texte, nous avons aussi démontré certains faits ayant des applications autres que l'analogie polynôme $\leftrightarrow$ fonction holomorphe. C'est par exemple le cas du théorème 25 de Mittag-Leffler, pouvant être vu comme un "passage du local au global" du développement en série de Laurent d'une fonction méromorphe. Pour mieux "quantifier" cette idée, il faut introduire la notion de cohomologie de Cêch, ce qui est fait par exemple dans [2].

Références

[1] Jean-François Pabion. *Éléments d'analyse complexe*. Ellipses, 2013. ISBN : 9782729883065.

[2] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique : Une introduction*. InterÉditions, 1995. ISBN : 9782729605636.

[3] Aviva Szpirglas. *Mathémtiques L3 - Algèbre*. Pearson, 2009. ISBN : 9782744073519.