

Paradoxe de Banach-Tarski et théorème de
Tarski, lien entre décompositions paradoxales
et existence de mesures invariantes finiment
additives

Evan Fernandes
encadré par Julien Melleray

Table des matières

1	Quelques mots sur l'axiome du choix	2
1.1	Axiome du choix et formes équivalences	2
1.2	Pathologies	3
2	Complément de topologie	4
2.1	Topologie produit	4
2.2	Filtres, ultrafiltres et théorème de Tykhonov	6
3	Paradoxe de Banach-Tarski	13
3.1	Introduction	13
3.2	Décompositions paradoxales	15
3.3	Conséquence sur l'existence de certaines mesures	23
4	Éléments de théorie des graphes	25
4.1	Définitions	25
4.2	Théorème de Hall	26
5	Le semi-groupe des types d'équidécomposabilité	28
5.1	Définition, loi additive	28
5.2	Loi de simplification	31
6	Théorème de Tarski	34
6.1	Mesure et semi-groupe des types	34

Les éléments des deux premiers chapitres s'appuient sur des notes de cours de Julien Melleray.

Chapitre 1

Quelques mots sur l'axiome du choix

1.1 Axiome du choix et formes équivalences

Définition 1.1.1

Soit X un ensemble, une *fonction de choix* sur X est une fonction $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}, f(A) \in A$$

Axiome 1.1.2 (Axiome du choix)

Tout ensemble admet une fonction de choix.

Théorème 1.1.3

L'axiome du choix est équivalent à l'énoncé suivant :

Soit I un ensemble quelconque non vide, et $(A_i)_{i \in I}$ famille d'ensembles tous non vides, alors :

$$\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons l'axiome du choix.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles tous non vides, posons $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, alors il existe une fonction de choix sur A , notons la $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$, alors $\forall i \in I, A_i \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, et donc $f(A_i) \in A_i$.

Posons alors :

$$(g(i))_{i \in I} = (f(A_i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i,$$

d'où $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Supposons que tout produit d'ensembles non vides est non vide.

Soit X un ensemble, si $X = \emptyset$, la fonction vide convient.

Si $X \neq \emptyset$, alors $\prod_{A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}} A \neq \emptyset$, alors il existe $(x_A)_{A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}} \in \prod_{A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}} A$, posons alors :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} & \rightarrow & X \\ A & \mapsto & x_A \end{array}$$

c'est une fonction de choix sur X . □

Définitions 1.1.4

Soit $(X, \leq)$ un ensemble partiellement ordonné.

- i) Un élément $x \in X$ est dit *maximal* si : $\forall y \in X, x \leq y \Rightarrow x = y$
- ii) X est dit *inductif* si toute partie totalement ordonnée de X admet un majorant dans X .

Lemme 1.1.5 (Lemme de Zorn)

Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

Remarque : Le lemme de Zorn est un énoncé équivalent à l'axiome du choix permettant des preuves d'existence non constructives, par exemple :

Sur un corps quelconque tout espace vectoriel admet une base.

Tout idéal d'un anneau est contenu dans un idéal maximal.

Tout corps admet une clôture algébrique.

Tout filtre est contenu dans un ultrafiltre (cf partie 2.2).

1.2 Pathologies

L'axiome du choix est un outil puissant qui permet de démontrer certains résultats tellement contre intuitifs qu'on en revient à questionner la véracité de celui-ci, le paradoxe de Banach-Tarski en est un exemple frappant (cf partie 3.2).

On peut de même mentionner que l'axiome du choix permet de construire des ensembles non Lebesgue mesurables sur $\mathbb{R}^n$, ce qui mène également à certaines discussions sur la tribu de Lebesgue, nous en verrons un exemple dans $\mathbb{R}^3$ en partie 3.3.

Cependant, si on suppose que toute partie de $\mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, en particulier que l'axiome du choix est faux, alors (sans rentrer dans les détails des démonstrations) on arrive également à des résultats étranges. Par exemple dans ce cas, cet énoncé est vrai :

Il n'existe pas d'injection de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Quand bien même, il existe une injection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Chapitre 2

Complément de topologie

2.1 Topologie produit

Définition 2.1.1

Soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, posons $X = \prod_{i \in I} X_i$ l'espace produit.

Un cylindre ouvert dans X est une partie C telle que :

$$C = \{x \in X \mid \forall i \in F, x_i \in O_i\}$$

où $F \subseteq I$ finie et $\forall i \in I, O_i \in \tau_i$.

On considère alors une famille d'ensembles $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ telle que :

$U \in \tau$ ssi pour tout $x \in U$, il existe un cylindre ouvert C de X tel que $x \in C \subseteq U$.

τ définit une topologie sur X , c'est la topologie produit.

Démonstration :

Montrons que τ vérifie les axiomes d'une topologie :

$\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ pour $F = \emptyset$

Soit $(U_i)_{i \in I} \in \tau^I$, soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ alors $\exists i \in I, x \in U_i$, et donc il existe C un cylindre ouvert tel que :

$$x \in C \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

et donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Soit $(U_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \tau^{\{1, \dots, n\}}$, soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, x \in U_i$, alors il existe C_i un cylindre ouvert tel que $x \in C_i \subseteq U_i$ et alors on a :

$$x \in \bigcap_{i=1}^n C_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

or une intersection finie de cylindres ouverts est un cylindre ouvert, et donc $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

τ est donc bien une topologie sur X . □

Remarque : Les ouverts de τ sont les réunions de cylindres ouverts.
De plus, (X, τ) coïncide bien avec le cas fini et dénombrable vu en cours.

Définition 2.1.2

Soient X un ensemble, $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, $i \in I$ et $f : X \rightarrow Y_i$ des fonctions.

Posons $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$.

On définit τ la topologie induite par $\mathcal{F}$ telle que :

$$U \in \tau \iff U \subseteq X \text{ et } \forall u \in U, \exists F \subseteq I \text{ finie et}$$

$$\forall i \in F, \exists U_i \in \tau_i \text{ tels que } u \in \{x \in X \mid \forall i \in F, f_i(x) \in U_i\} \subseteq U$$

Remarque : La preuve que τ définit une topologie sur X est similaire à celle de la topologie produit.

τ est la plus petite topologie rendant les f_i continues.

En effet, pour tout $i \in I$, $O_i \in \tau_i$, $f_i^{-1}(O_i) = \{x \in X \mid f_i(x) \in O_i\} \in \tau$ donc f_i est continue.

De plus, si τ_0 est une topologie sur X rendant continues les f_i , alors pour $U \in \tau$,

$$\forall u \in U, \exists F \subseteq I, \exists (U_i)_{i \in F} \text{ tels que } u \in \{x \in X \mid \forall i \in F, f_i(x) \in U_i\} \subseteq U,$$

$$\text{alors } u \in \bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(U_i) \subseteq U, \text{ or } f_i^{-1}(U_i) \in \tau_0 \text{ car } f_i \text{ est continue pour } \tau_0,$$

$$\text{et donc } U \subseteq \bigcup_{F \subseteq I \text{ finie}} \bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(U_i) \subseteq U \text{ donc } U = \bigcup_{F \subseteq I \text{ finie}} \bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(U_i) \in \tau_0, \text{ d'où } \tau \subseteq \tau_0.$$

Théorème 2.1.3

Soient X un ensemble, $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, et pour tout $i \in I$, $f_i : X \rightarrow Y_i$ une fonction et τ la topologie induite par $(f_i)_{i \in I}$.

Soient (Z, τ_Z) une espace topologique et $g : Z \rightarrow X$ une fonction, alors :

$$g \in \mathcal{C}^0((Z, \tau_Z), (X, \tau)) \iff f_i \circ g \in \mathcal{C}^0((Z, \tau_Z), (Y_i, \tau_i))$$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Si g est continue, comme les f_i sont continues par rapport à τ , $f_i \circ g$ est continue par composition.

($\Leftarrow$) Supposons $\forall i \in I, f_i \circ g$ continue.

Soit $U \in \tau$, montrons que $g^{-1}(U) \in \tau_Z$.

Pour $z \in g^{-1}(U)$ posons $u = g(z) \in U$, alors :

$$\text{alors } \exists F \subseteq I \text{ finie et } (O_i)_{i \in F} \text{ tels que } u \in \{x \in X \mid \forall i \in F, f_i(x) \in O_i\} \subseteq U,$$

$$\text{alors } u \in \bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(O_i) \subseteq U,$$

$$\text{alors } z \in g^{-1}\left(\bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(O_i)\right) \subseteq g^{-1}(U),$$

$$\text{alors } z \in \bigcap_{i \in F} (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \subseteq g^{-1}(U),$$

avec $(f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \tau_Z$ car $f_i \circ g$ est continue, alors :

$$\bigcap_{i \in F} (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \tau_Z.$$

On a donc :

$$\forall z \in g^{-1}(U_i), \exists V_z \in \tau_Z, z \in V_z \subseteq U,$$

et alors $g^{-1}(U) = \bigcup_{z \in g^{-1}(U)} V_z \in \tau_Z$, g est donc continue. $\square$

Théorème 2.1.4

Soit $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques tous non vides.

Posons $X = \prod_{i \in I} X_i$ et $\pi_i : X \rightarrow X_i$ la projection sur la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, notons $\pi_i(x) = x(i)$,

alors la topologie produit sur X est la topologie induite par $(\pi_i)_{i \in I}$.

Démonstration :

Notons τ la topologie produit et τ_0 la topologie induite par $(\pi_i)_{i \in I}$

Montrons que $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_0)$ est continue.

$\pi_i \circ id : (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ est continue car τ rend les $(\pi_i)_{i \in I}$ continues, alors d'après le théorème précédent, $id : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_0)$ est continue, et donc $\tau_0 \subseteq \tau$.

Réciproquement, soit C un cylindre ouvert dans X ($C \in \tau$), alors il existe $F \subseteq I$ finie et $(O_i) \in \prod_{i \in F} \tau_i$ tels que :

$$\begin{aligned} C &= \{x \in X \mid \forall i \in I, \pi_i(x) \in O_i\} \\ &= \{x \in X \mid \forall i \in I, x \in \pi_i^{-1}(O_i)\} \\ &= \bigcap_{i \in F} \pi_i^{-1}(O_i) \in \tau_0. \end{aligned}$$

Or les ouverts de (X, τ) sont les réunions quelconques de cylindres ouverts, donc $\tau \subseteq \tau_0$, d'où $\tau = \tau_0$. $\square$

2.2 Filtres, ultrafiltres et théorème de Tykhonov

Remarque : Dans cette section, on admet et utilise librement l'axiome du choix.

Définition 2.2.1

Soit X un ensemble non vide, un *filtre* sur X est une famille $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$ vérifiant :

- i) Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- ii) Si $A \in \mathcal{F}, B \subseteq X$ et $A \subseteq B$, alors $B \in \mathcal{F}$.
- iii) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Remarque : On a toujours $X \in \mathcal{F}$, en effet comme $\mathcal{F} \neq \emptyset$, alors il existe $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq X$, donc $X \in \mathcal{F}$ d'après (ii)

De plus pour $A \subseteq X$, on ne peut pas avoir $A \in \mathcal{F}$ et $X \setminus A \in \mathcal{F}$ car sinon $A \cap (X \setminus A) = \emptyset \in \mathcal{F}$, c'est impossible d'après (iii).

Exemples : Soit X un ensemble non vide, $\{X\}$ est un filtre.

Si X est infini, $S \subseteq X, S \neq \emptyset$, alors $\{A \subseteq X \mid S \subseteq A\}$ est un filtre, on les appelle les filtre *principaux*.

Le plus important, $\{A \subseteq X \mid A^c \text{ est fini}\}$ est un filtre, c'est le filtre de *Fréchet* sur X .

Démontrons pour le filtre de Fréchet (notons le $\mathcal{F}$) :

- i) Soient $A, B \in \mathcal{F}$, alors $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ et est donc fini, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- ii) Soient $A \in \mathcal{F}, B \subseteq X$ tels que $A \subseteq B$, alors $B^c \subseteq A^c$ et A^c est fini donc B^c également, d'où $B \in \mathcal{F}$
- iii) $\emptyset^c = X$, et X est infini donc $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ est donc bien un filtre.

Définition 2.2.2

Une famille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une *base de filtre* si toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$ sont non vides.

Théorème 2.2.3

Soit X un ensemble non vide. Pour toute base de filtre $\mathcal{A} \subseteq X$, il existe un filtre sur X contenant $\mathcal{A}$, le plus petit tel filtre est défini par :

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } \exists A_1, \dots, A_n, \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq B\}$$

Démonstration :

Montrons que $\mathcal{F}$ est un filtre :

Soient $A, B \in \mathcal{F}$, alors il existe $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ tels que $\bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A$ et $\bigcap_{i=1}^m B_i \subseteq B$, et alors :

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m B_i\right) \subseteq A \cap B,$$

d'où $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Soient $A \in \mathcal{F}$ et $B \subseteq X$ tels que $A \subseteq B$, alors il existe $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tels que :

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A \subseteq B,$$

donc $B \in \mathcal{F}$.

Pour finir $\mathcal{A}$ est une base de filtre donc $\emptyset \notin \mathcal{F}$ car sinon il y aurait une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$ d'intersection vide. Alors $\mathcal{F}$ est bien un filtre.

De plus, on a évidemment $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Prenons maintenant $\mathcal{G}$ un filtre sur X contenant $\mathcal{F}$.

Soit $A \in \mathcal{F}$, alors il existe $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tels que $\bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A$, et comme $\mathcal{G}$ est un filtre et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, A_i \in \mathcal{G}$, alors : $A \in \mathcal{G}$.

D'où $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. □

Définition 2.2.4

Un filtre $\mathcal{U}$ sur X est un *ultrafiltre* si pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X on a :

$$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{F}.$$

Si on considère $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{F} \text{ est un filtre sur } X\}$, alors les ultrafiltres sur X sont exactement les éléments maximaux de $\mathfrak{F}$ pour l'inclusion.

Théorème 2.2.5 (ou axiome de l'ultrafiltre)

Pour X un ensemble non vide, tout filtre sur X est contenu dans un ultrafiltre.

Démonstration :

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X fixé, posons :

$$\mathfrak{L} = \{\mathcal{G} \text{ filtre sur } X \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\},$$

$\mathfrak{L}$ est partiellement ordonné par $\subseteq$, montrons qu'il est inductif.

Soit $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{L}$ totalement ordonné, posons $\mathcal{Y}_\infty = \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathfrak{Y}} \mathcal{F}$. $\mathcal{Y}_\infty$ majore évidemment $\mathfrak{Y}$, montrons qu'il est dans $\mathfrak{L}$.

Soient $A, B \in \mathcal{Y}_\infty$ alors il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \mathfrak{Y}$ tels que $A \in \mathcal{G}$ et $B \in \mathcal{H}$, et comme $\mathfrak{Y}$ est totalement ordonné, ou bien $A, B \in \mathcal{G}$, ou bien $A, B \in \mathcal{H}$, dans tous les cas, $A \cap B \in \mathcal{Y}_\infty$ car $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ sont des filtres.

Soient $A \in \mathcal{Y}_\infty, B \subseteq X$ tels que $A \subseteq B$, alors il existe $\mathcal{G} \in \mathfrak{Y}$ tel que $A \in \mathcal{G}$, et alors comme $\mathcal{G}$ est un filtre, $B \in \mathcal{Y}_\infty$.

De plus, $\forall \mathcal{G} \in \mathfrak{Y}, \emptyset \notin \mathcal{F}$ car $\mathcal{G}$ est un filtre sur X et donc $\emptyset \notin \mathcal{Y}_\infty$. $\mathcal{Y}_\infty$ est un filtre.

Finalement, $\forall \mathcal{G} \in \mathfrak{Y}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{Y}_\infty$, et donc $\mathcal{Y}_\infty \in \mathfrak{L} : (\mathfrak{L}, \subseteq)$ est inductif.

D'après le lemme de Zorn, $\mathfrak{L}$ admet un élément maximal, notons le $\mathcal{U} \in \mathfrak{L}$, donc $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ et pour tout $\mathcal{G}$ filtre sur X tel que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ donc $\mathcal{G} \in \mathfrak{L}$ et alors par maximalité de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} = \mathcal{G}$, $\mathcal{U}$ est donc un ultrafiltre sur X . □

Théorème 2.2.6

Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est un ultrafiltre ssi $\forall A \subseteq X, A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe $A \subseteq X$ tel que $A \notin \mathcal{F}$ et $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} \cup \{A\}$ est une

base de filtre.

En effet, soient $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{F}$, supposons $B_1 \cap \dots \cap B_n \cap A = \emptyset$ alors $B_1 \cap \dots \cap B_n \subseteq X \setminus A$, or $B_1 \cap \dots \cap B_n \in \mathcal{F}$ donc $X \setminus A \in \mathcal{F}$: absurde, donc $B_1 \cap \dots \cap B_n \cap A \neq \emptyset$.

Alors il existe un filtre contenant $\mathcal{F} \cup \{A\}$, en particulier il contient strictement $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas un ultrafiltre sur X , alors il existe $\mathcal{G}$ filtre sur X tel que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$.

Soit $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, alors $A \notin \mathcal{F}$. Si $X \setminus A \in \mathcal{F}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{G}$, absurde car $A \in \mathcal{G}$, donc $X \setminus A \notin \mathcal{F}$. $\square$

Remarque : On va chercher à cerner le comportement d'un filtre quand on lui applique une fonction $f : X \rightarrow Y$.

Cependant, pour un filtre $\mathcal{F}$ sur X , $\{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$ n'est pas forcément un filtre, en effet si f n'est pas surjective, $Y \notin \{f(A) \mid A \in \mathcal{F}\}$.

D'où la définition suivante :

Définition 2.2.7

Soient X et Y deux ensembles non vides, $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $f : X \rightarrow Y$ une fonction. Alors $f(\mathcal{F}) = \{A \subseteq Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est un filtre, qu'on appelle *filtre image* de $\mathcal{F}$ par f .

Théorème 2.2.8

Le filtre image d'un ultrafiltre est un ultrafiltre.

Démonstration :

Soient X, Y deux ensembles non vides, $f : X \rightarrow Y$ une fonction et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X .

Soit $A \subseteq Y$, ou bien $A \in f(\mathcal{U})$: O.K.

Ou bien $A \notin f(\mathcal{U})$, alors :

$$f^{-1}(A) \notin \mathcal{U} \text{ et donc } X \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$$

car c'est un ultrafiltre, or :

$$X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A) \in \mathcal{U}, \text{ donc } Y \setminus A \in f(\mathcal{U}),$$

$f(\mathcal{U})$ est donc bien un ultrafiltre. $\square$

Définition 2.2.9

Soient X un espace topologique et $x \in X$, on note $\mathcal{V}_x$ la famille des voisinages de x , c'est un filtre.

Pour $\mathcal{F}$ un filtre sur X et $x \in X$, on dit que $\mathcal{F}$ *converge* vers x si $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$.

Remarque : On utilise les filtres pour étendre la notion de convergence quand les suites ne suffisent plus à démontrer certaines propriétés, par exemple dans un produit non dénombrable d'espaces topologiques.

Montrons un exemple du lien entre filtre et convergence :

Pour une suite $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$, notons $\mathcal{F}$ le filtre de Fréchet sur $\mathbb{N}$ et $x(\mathcal{F})$ le filtre image de $\mathcal{F}$ par (x_n) , soit $l \in X$, alors :

$$\begin{aligned}
 x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l &\iff \forall V \in \mathcal{V}_l, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in V \\
 &\iff \forall V \in \mathcal{V}_l, \{n \in \mathbb{N}, x_n \notin V\} \text{ est fini} \\
 &\iff \forall V \in \mathcal{V}_l, x^{-1}(V)^{\complement} \text{ est fini} \\
 &\iff \forall V \in \mathcal{V}_l, x^{-1}(V) \in \mathcal{F} \\
 &\iff \forall V \in \mathcal{V}_l, V \in x(\mathcal{F}) \\
 &\iff \mathcal{V}_l \subseteq x(\mathcal{F}) \\
 &\iff x(\mathcal{F}) \text{ converge vers } l.
 \end{aligned}$$

Théorème 2.2.10

Soit X un espace topologique.

X est séparé ssi tout filtre convergent sur X a une unique limite.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Si X est séparé, soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X convergent vers $x \in X$.

Soit $y \in X$ tel que $\mathcal{F}$ converge vers y . Supposons $x \neq y$, comme X est séparé, il existe $U \in \mathcal{V}_x$ et $V \in \mathcal{V}_y$ tels que $U \cap V = \emptyset$, alors $V \notin \mathcal{F}$ car sinon $U \cap V = \emptyset \in \mathcal{F}$: absurde.

Alors $\mathcal{V}_y \not\subseteq \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ ne converge pas vers y .

($\Leftarrow$) Supposons que X ne soit pas séparé.

Soient $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Alors $\forall (U, V) \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_y, U \cap V \neq \emptyset$.

Posons $\mathcal{B} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{V}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$, alors $\mathcal{B}$ est une base de filtre.

En effet, pour $U_1 \cap V_1, \dots, U_n \cap V_n \in \mathcal{B}$, alors $\bigcap_{i=1}^n U_i \cap V_i = (\bigcap_{i=1}^n U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^n V_i) \neq \emptyset$ car $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{V}_x$ et $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}_y$.

Prenons alors $\mathcal{F}$ un filtre sur X contenant $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$ et $\mathcal{V}_y \subseteq \mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ converge vers x et y , il n'y a pas unicité de la limite. $\square$

Théorème 2.2.11

Soient X, Y deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \rightarrow Y$ une fonction, alors :

f est continue en x ssi $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ convergent vers x .

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons f continue en x .

Soit $\mathcal{F}$ un filtre convergent vers x , soit V un voisinage de $f(x)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x car f est continue, alors :

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F},$$

alors $V \subseteq f(\mathcal{F})$, donc $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, si $f(\mathcal{F})$ converge vers $f(x)$ pour tout filtre $\mathcal{F}$ convergent vers x .

Soit V un voisinage de $f(x)$, on sait que $f(\mathcal{V}_x)$ converge vers $f(x)$, alors $V \in f(\mathcal{V}_x)$ et donc $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$: f est continue. $\square$

Théorème 2.2.12

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides et soit $X = \prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit.

Un filtre $\mathcal{F}$ sur X est convergent ssi chacun des filtres image $\pi_i(\mathcal{F})$ est convergent.

Démonstration :

($\Rightarrow$) $\pi_i : X \rightarrow X_i$ est continue, alors si $\mathcal{F}$ est convergent sur X , $\pi_i(\mathcal{F})$ l'est sur X_i d'après la proposition précédente.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $\forall i \in I, \pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $x(i) \in X_i$, montrons alors que $\mathcal{F}$ converge vers $x = (x(i))_{i \in I}$.

Soit V un voisinage de x , qu'on suppose de la forme $V = \{y \in X \mid \forall j \in J, \pi_j(y) \in U_j\}$ où $J \subseteq I$ fini et U_j ouvert de X_j contenant $x(j)$.

Pour tout $j \in J, U_j \in \pi_j(\mathcal{F})$ car U_j voisinage de $x(j)$ et $\pi_i(\mathcal{F})$ converge vers $x(j)$. Alors :

$$\pi_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{F} \text{ et donc } V = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{F}$$

car J est fini et $\mathcal{F}$ est un filtre.

En toute généralité, si V est un voisinage contenant x , alors il contient une réunion de cylindres ouverts contenant elle même x , en particulier, il existe C un cylindre ouvert tel que $x \in C \subseteq V$ donc $V \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}$ contient bien tous les voisinages de x . $\mathcal{F}$ converge donc vers x . $\square$

Théorème 2.2.13

Soient X un espace topologique, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X et $x \in X$.

Alors $\mathcal{U}$ converge vers x ssi $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, avec $\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \in \mathcal{U} \text{ et } A \text{ fermé}\}$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que $\mathcal{U}$ converge vers x .

Soit $A \in \mathcal{U}$ fermé, supposons par l'absurde que $x \notin A$, alors $X \setminus A$ est un voisinage de x , alors $X \setminus A \in \mathcal{U}$, c'est absurde, donc $x \in A$, d'où $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$.

($\Leftarrow$) Si $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, soit V un ouvert contenant x .

Si $V \notin \mathcal{U}$, alors $X \setminus V \in \mathcal{U}$ et $X \setminus V$ est fermé, donc $x \in X \setminus V$, c'est absurde, donc $V \in \mathcal{U}$.

Si maintenant V est un voisinage de x , alors il contient un ouvert contenant x et donc $V \in \mathcal{F}$, il converge vers x . $\square$

Théorème 2.2.14

Soit X un espace topologique séparé, alors :

X est compact ssi tout ultrafiltre sur X est convergent.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que X ne soit pas compact.

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X , alors $(O_i^c)_{i \in I}$ forme une base de filtre, en effet,

pour $J \subseteq I$ fini, si $\bigcap_{j \in J} O_j^c = \emptyset$, alors $\bigcup_{j \in J} O_j = X$ donc X admet un sous recouvrement ouvert fini, c'est absurde, donc $\bigcap_{j \in J} O_j^c \neq \emptyset$.

Alors $(O_i^c)_{i \in I}$ est contenue dans un ultrafiltre, notons $\mathcal{U}$. $\mathcal{U}$ n'est pas convergent car :

$$\forall x \in X, \exists i \in I, x \in O_i \text{ et alors } O_i \notin \mathcal{U} \text{ or } O_i \in \mathcal{V}_x.$$

($\Leftarrow$) Si X est compact, posons $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X et $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{U} \mid A \text{ est fermé}\}$.

$\mathcal{A}$ a la propriété d'intersection finie non vide car $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ et donc $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ car X est compact, alors pour $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, le théorème précédent nous indique que $\mathcal{U}$ converge vers x . $\square$

Théorème 2.2.15 (Théorème de Tykhonov)

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides, posons $X = \prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit, alors :

X est compact ssi chacun des X_i est compact.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons X compact.

Comme $\forall i \in I, \pi_i$ est continue, alors $X_i = \pi_i(X)$ est compact.

($\Leftarrow$) Supposons que chaque X_i soit compact.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X , alors $\pi_i(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre sur X_i , et il est convergent car X_i compact, et ce pour tout $i \in I$, alors $\mathcal{U}$ est convergent. Tout ultrafiltre sur X est donc convergent : X est compact. $\square$

Les résultats des chapitres suivants sont tirés des références [TW16] et [CM09].

Chapitre 3

Paradoxe de Banach-Tarski

3.1 Introduction

Définition 3.1.1

Soit F un groupe (de neutre e), c'est un *groupe libre* (de rang 2) s'il existe $a, b \in F$ tels que $F = \langle a, b \rangle$ et a, b n'ont pas de relation algébrique.

C'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k_1, \dots, k_n \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \frac{a^{k_1} b^{k_2} \dots a^{k_{n-1}} b^{k_n}}{a^{k_1} b^{k_2} \dots b^{k_{n-1}} a^{k_n}} \neq e$ si n est pair.
 $\frac{a^{k_1} b^{k_2} \dots a^{k_{n-1}} b^{k_n}}{a^{k_1} b^{k_2} \dots b^{k_{n-1}} a^{k_n}} \neq e$ si n est impair.

De même, soit F un semi groupe (de neutre e), F est un *semi groupe libre* (de rang 2), s'il existe $a, b \in F$ tels que $F = \{a^{k_1} b^{l_1} \dots a^{k_n} b^{l_n} \mid n \in \mathbb{N}, k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}\}$ et a, b n'ont pas de relation algébrique.

Remarque : En gardant les notations de la définition précédente, si on considère $A = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, alors $F = \{c_1 \dots c_n \mid c_1, c_1, \dots, c_n \in A\}$ est l'ensemble des mots sur A .

On dit qu'un mot $c_1 \dots, c_n \in F$ est *réduit* si : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, c_i \neq c_{i+1}^{-1}$.

Quitte à simplifier, on peut considérer que tous les mots de F sont réduits.

On peut alors reformuler le fait que a, b n'ont pas de relation algébrique en disant que tout mot sur A réduit non trivial est différent de l'identité.

Définition 3.1.2

Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $E \subseteq X, E \neq \emptyset$.

On dit que E est G *dédoublable* s'il existe $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \subseteq E$ deux à deux disjoints et $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ tels que :

$$E = \bigcup_{i=1}^m g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=1}^n h_j \cdot B_j.$$

Pour un groupe agissant sur lui même par multiplication à gauche, on dit que G est *dédoublable* si G est G dédoublable.

Remarque : On peut supposer dans la définition précédente que les $(g_i \cdot A_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$, $(h_j \cdot B_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$ forment une partition de E respectivement, quitte à prendre des ensembles A_i et B_j plus petits pour assurer le caractère disjoint. On supposera par la suite que c'est le cas.

On notera dans la suite $\sqcup$ les réunions disjointes.

Le paradoxe de Banach-Tarski stipule que la boule unité est $SO_3(\mathbb{R})$ dédoublable, on va chercher à démontrer ce résultat (cf théorème 3.2.9).

Théorème 3.1.3

Un groupe libre F de rang 2 est dédoublable.

Démonstration :

Notons $F = \langle \sigma, \tau \rangle$. Pour $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, notons

$$W(\rho) = \{c_k \dots c_n \in F \mid c_1 = \rho\}$$

l'ensemble des mots commençant par ρ .

Alors $F = W(\sigma) \sqcup W(\sigma^{-1}) \sqcup W(\tau) \sqcup W(\tau^{-1}) \sqcup \{e\}$.

Mais $F = W(\sigma) \cup (\sigma \cdot W(\sigma^{-1}))$, en effet, $\sigma \cdot W(\sigma^{-1})$ correspond aux mots ne commençant pas par σ . De même, $F = W(\tau) \cup (\tau \cdot W(\tau^{-1}))$, donc F est dédoublable. $\square$

Proposition 3.1.4

Un semi groupe libre S engendré par σ, τ contient deux sous ensembles disjoints A et B tels que $\sigma \cdot S = A$ et $\tau \cdot S = B$.

De plus, tout groupe ayant un semi sous groupe libre de rang 2 contient un ensemble dédoublable.

Démonstration :

Si A est l'ensemble des mots commençant par σ et B l'ensemble des mots commençant par τ , alors $A = \sigma \cdot S$ et $B = \tau \cdot S$, et $A \cap B = \emptyset$.

Si S est inclus dans un groupe, alors S est dédoublable car $S = \sigma^{-1} \cdot A = \tau^{-1} \cdot B$. $\square$

Proposition 3.1.5

Si G est dédoublable et agit sur X librement, (i.e $\forall (g, x) \in G \times X, g \cdot x = x \Rightarrow g = e$), alors X est G dédoublable.

En particulier, si F est un groupe libre de rang deux agissant sur X librement, alors X est F dédoublable.

Démonstration :

Soient $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \subseteq G$ disjoints et $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ tels que

$$G = \bigcup_{i=1}^m g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=1}^n h_j \cdot B_j \quad (G \text{ est dédoublable}).$$

Par l'axiome du choix, posons M un ensemble contenant exactement un représentant de chaque G orbite sur X , alors $\{g \cdot M \mid g \in G\}$ forme une partition de X .

En effet, les orbites forment une partition de X donc :

$$\begin{aligned} x \in X &\iff \exists y \in X, x \in G \cdot y \\ &\iff \exists (g, y) \in G \times X, x = g \cdot y \\ &\iff \exists (g, m) \in G \times M, x = g \cdot y \in g \cdot M \\ &\iff x \in \bigcup_{g \in G} g \cdot M. \end{aligned}$$

De plus la réunion est disjointe car s'il existe $g, h \in G$ tels que $(g \cdot M) \cap (h \cdot M) \neq \emptyset$, alors il existe $m_1, m_2 \in M$ tels que $g \cdot m_1 = h \cdot m_2$ et donc $m_1, m_2 \in G \cdot m_2$ or $m_1, m_2 \in M$ donc $m_1 = m_2$, et alors $h^{-1}g \cdot m_1 = m_1$, donc $h^{-1}g = e$ i.e $h = g$.

Définissons alors pour $S \subseteq G$, $S^* = \{g \cdot M \mid g \in S\}$.

Alors $X = G^* = (\bigcup_{i=1}^m g_i \cdot A_i)^* = \bigcup_{i=1}^m g_i \cdot A_i^*$,

de même, $X = \bigcup_{j=1}^n h_j \cdot B_j^*$. Et $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ sont disjoints, donc $A_1^*, \dots, A_m^*, B_1^*, \dots, B_n^* \subseteq X$ également, donc X est G dédoublable. $\square$

3.2 Décompositions paradoxales

Théorème 3.2.1

Posons $\sigma = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tau = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Alors $\sigma, \tau \in SO_3(\mathbb{R})$ et elles engendrent un sous groupe libre de $SO_3(\mathbb{R})$ de rang deux. Ce sont les *rotations de Satô*.

Alors $SO_3(\mathbb{R})$ a un sous groupe libre de rang 2.

Démonstration :

On remarque aisément que $\sigma\sigma^\top = I_3$ et $\tau\tau^\top = I_3$, de plus, $\det(\tau) = \det(\sigma) = 1$, d'où $\sigma, \tau \in SO_3(\mathbb{R})$.

Montrons qu'un mot réduit non trivial en $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ ne peut pas être I_3 .

Remarquons que si w est un tel mot et $w = e$, alors en conjuguant par σ , et éventuellement en inversant w , on peut supposer que w termine par un σ .

Définissons quatre matrices :

$$\begin{aligned} M_\sigma &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, M_\tau = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \\ M_\sigma^- &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}, M_\tau^- = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarquons que $M_\sigma = 7 \cdot \sigma$, $M_\tau = 7 \cdot \tau$, $M_\sigma^- = 7 \cdot \sigma^{-1}$, $M_\tau^- = 7 \cdot \tau^{-1}$, alors quitte à diviser par une puissance de 7 on peut se restreindre à des mots en $M_\sigma, M_\tau, M_\sigma^-, M_\tau^-$.

Soient $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ tels que $k_1 \geq 0$, $\forall i \in \{2, \dots, n-1\}, k_i \neq 0$.

Posons alors $w = M_\sigma^{k_n} M_\tau^{k_{n-1}} \dots M_\tau^{k_2} M_\sigma^{k_1} M_\sigma$, les puissances négatives correspondent aux puissances de M_σ^- ou M_τ^- .

On veut montrer que $7^{-N}w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$, avec $N = \sum_{i=1}^n k_i + 1$.

On va s'intéresser à $w(1, 0, 0)$, la première colonne de w .

Dans la suite on travaille modulo 7 pour simplifier les calculs (la relation d'appartenance $\in$ correspond à l'appartenance modulo 7). Définissons quatre ensembles de vecteurs :

$$\begin{aligned} V_\sigma &= \{(3, 1, 2), (5, 4, 1), (6, 2, 4)\} \\ V_\sigma^- &= \{(3, 2, 6), (5, 1, 3), (6, 4, 5)\} \\ V_\tau &= \{(3, 5, 1), (5, 6, 4), (6, 3, 2)\} \\ V_\tau^- &= \{(1, 5, 4), (2, 3, 1), (4, 6, 2)\} \end{aligned}$$

Ces quatre ensembles vérifient les propriétés suivantes (vérification simple) :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \forall v \in V_\sigma \cup V_\tau \cup V_\tau^-, \quad M_\sigma v \in V_\sigma \\ (2) \quad & \forall v \in V_\sigma^- \cup V_\tau \cup V_\tau^-, \quad M_\sigma^- v \in V_\sigma^- \\ (3) \quad & \forall v \in V_\tau \cup V_\sigma \cup V_\sigma^-, \quad M_\tau v \in V_\tau \\ (4) \quad & \forall v \in V_\tau^- \cup V_\sigma \cup V_\sigma^-, \quad M_\tau^- v \in V_\tau^- \end{aligned}$$

Mais $M_\sigma(1, 0, 0) = (6, 2, -3) = (6, 2, 4) \in V_\sigma$, alors par (1), $M_\sigma^{k_1} M_\sigma(1, 0, 0) \in V_\sigma$.

Ensuite par (3) ou (4) en fonction du signe de k_2 , $M_\tau^{k_2} M_\sigma^{k_1} M_\sigma(1, 0, 0) \in V_\tau \cup V_\tau^-$.

De même, par (1) ou (2) en fonction du signe de k_3 , alors $M_\sigma^{k_3} M_\tau^{k_2} M_\sigma^{k_1} M_\sigma(1, 0, 0) \in V_\sigma \cup V_\sigma^-$.

On itère jusqu'à k_n , et alors on se retrouve avec $w(1, 0, 0) \in V_\sigma \cup V_\sigma^- \cup V_\tau \cup V_\tau^-$.

Or aucun vecteur dans $V_\sigma \cup V_\sigma^- \cup V_\tau \cup V_\tau^-$ n'est $(0, 0, 0)$ modulo 7 et donc en particulier, aucun n'est égal à $(1, 0, 0)$ en divisant par une puissance de 7.

Précisons : Si $7^{-N}w(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, alors $w(1, 0, 0) = (7^N, 0, 0)$ et donc $w(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ modulo 7. Par contraposée, on a bien $7^{-N}w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$.

On a donc bien montré que tout mot réduit en $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ non trivial est différent de l'identité, d'où le théorème. $\square$

Théorème 3.2.2 (Paradoxe de Hausdorff)

Il existe un ensemble dénombrable $D \subseteq \mathbb{S}^2$ tel que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est $SO_3(\mathbb{R})$ dédoublable.

Démonstration :

Notons $F = \langle \sigma, \tau \rangle \subseteq SO_3(\mathbb{R})$ le groupe libre de rang 2 vu au théorème précédent. Il agit sur $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ car $\mathbb{S}^2$ est $SO_3(\mathbb{R})$ stable.

Posons :

$$D = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in F \setminus \{I_3\}, g \cdot x = x\},$$

l'ensemble des points fixés par un élément de F non trivial, montrons que D est dénombrable.

Remarquons que F est dénombrable. De plus,

$$D = \bigcup_{g \in F \setminus \{I_3\}} \{x \in \mathbb{S}^2 \mid g \cdot x = x\}.$$

Or pour $g \in F \setminus \{I_3\}$, c'est une rotation non triviale autour d'une droite $\text{Vect}(y)$, $y \neq 0$, et alors :

$$\{x \in \mathbb{S}^2 \mid g \cdot x = x\} = \text{Vect}(y) \cap \mathbb{S}^2 = \left\{ -\frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\},$$

c'est un ensemble fini donc D est bien dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles finis.

De plus $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est F stable car pour $(g, x) \in F \times (\mathbb{S}^2 \setminus D)$, si $g \cdot x \notin \mathbb{S}^2 \setminus D$, alors il existe $f \in F \setminus \{I_3\}$ tels que $f \cdot (g \cdot x) = (fg) \cdot x = g \cdot x$, et donc $(g^{-1}fg) \cdot x = x$ et $g^{-1}fg \in F \setminus \{I_3\}$, donc $x \in D$, c'est absurde.

Alors F agit sur $\mathbb{S}^2 \setminus D$ librement, d'après la proposition 3.1.5, $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est $SO_3(\mathbb{R})$ dédoublable. $\square$

Définition 3.2.3

Soient G un groupe agissant sur X , $A, B \subseteq X$.

Alors A et B sont G *équidécomposables* s'il existe $(A_1, \dots, A_n)$ une partition de A , $(B_1, \dots, B_n)$ une partition de B et $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que :

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\}, B_i = g_i \cdot A_i$$

On note $A \sim_G B$, c'est une relation d'équivalence.

De plus on note $A \preceq B$ s'il existe $C \subseteq B$ tel que $A \sim_G C$.

Démonstration :

Réflexivité : Soit $A \subseteq X$, alors A est une partition de A et $A = e \cdot A$, d'où $A \sim_G A$.

Symétrie : Soient $A, B \subseteq X$ tels que $A \sim_G B$, alors il existe $(A_1, \dots, A_n)$ une partition de A , $(B_1, \dots, B_n)$ une partition de B et $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que $B_i = g_i \cdot A_i$, alors $A_i = g_i^{-1} \cdot B_i$ et donc $B \sim_G A$.

Transitivité : Soient $A, B, C \subseteq X$ tels que $A \sim_G B$ et $B \sim_G C$, alors il existe $(A_1, \dots, A_n)$, $(B_1, \dots, B_n)$ des partitions de A et B respectivement, $(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_m)$, $(C_1, \dots, C_m)$ des partitions de B et C respectivement et $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tels que $B_i = g_i \cdot A_i$ et $C_j = h_j \cdot \tilde{B}_j$. Posons :

$$F_{ij} = B_j \cap \tilde{B}_j \text{ on a } \bigcup_{i=1}^n F_{ij} = B_j \text{ et } \bigcup_{j=1}^m F_{ij} = \tilde{B}_j.$$

Alors :

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1} \cdot B_i = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m g_i^{-1} \cdot F_{ij}$$

$$\text{et } C = \bigcup_{j=1}^m C_j = \bigcup_{j=1}^m h_j^{-1} \cdot \tilde{B}_j = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n h_j^{-1} \cdot F_{ij} = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n h_j^{-1} g_i \cdot (g_i^{-1} \cdot F_{ij}).$$

De plus, les $(g_i^{-1} \cdot F_{ij})$ forment une partition de A :

On a déjà vu que $A = \bigcup_{ij} g_i^{-1} \cdot F_{ij}$.

Soient $(i, j) \neq (k, l)$, si $i \neq k$, alors $g_i^{-1} \cdot F_{ij} = (g_i^{-1} \cdot B_i) \cap (g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_j) = A_i \cap (g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_j) \subseteq A_i$ et de même, $F_{kl} \subseteq A_k$ alors $F_{ij} \cap F_{kl} = \emptyset$.

Sinon, $i = k$ et $j \neq l$, alors $F_{ij} = A_i \cap g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_j \subseteq g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_j$ et de même, $F_{kl} \subseteq g_k^{-1} \cdot \tilde{B}_l = g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_l$ car $i = j$, or $(g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_l) \cap (g_i^{-1} \cdot \tilde{B}_j) = \emptyset$ d'où $F_{ij} \cap F_{kl} = \emptyset$.

De même, $(h_j^{-1} \cdot F_{ij})$ forment une partition de C et $h_j^{-1} \cdot F_{ij} = h_j^{-1} g_i \cdot (g_i^{-1} \cdot F_{ij})$, d'où $A \sim_G C$. $\square$

Propriété 3.2.4

Soit G un groupe agissant sur X .

(i) Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$ tels que $A \sim_G B$, alors il existe une bijection $g : A \rightarrow B$ telle que $\forall C \subseteq A, g(C) \sim_G C$.

(ii) Soient $A, B \subseteq X$ disjoints et $C, D \subseteq X$ disjoints tels que $A \sim_G C$ et $B \sim_G D$, alors $A \sqcup B \sim_G C \sqcup D$.

Démonstration :

(i) Soient $(A_1, \dots, A_n), (B_1, \dots, B_n)$ des partitions de A, B respectivement et $g_1, \dots, g_n \in G$ tels que $B_i = g_i \cdot A_i$. Posons alors :

$$g : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto g_i \cdot x \text{ si } x \in A_i \quad \text{C'est une bijection.}$$

Soit $C \subseteq A$, alors :

$$C = C \cap A = \bigsqcup_{i=1}^n (A_i \cap C) \text{ et alors } g(C) = \bigsqcup_{i=1}^n g(A_i \cap C) = \bigsqcup_{i=1}^n g_i \cdot (A_i \cap C) \sim_G \bigsqcup_{i=1}^n (A_i \cap C) = C.$$

(ii) Immédiat. $\square$

Remarque : La relation $\preceq$ sur $\mathcal{P}(X)$ définit une relation réflexive et transitive.

En effet, pour $A \subseteq X$, $A \sim_G A$ donc $A \preceq A$.

Soient $A, B, C \subseteq X$ telles que $A \preceq B$ et $B \preceq C$, alors il existe $D \subseteq B$ et $F \subseteq C$ tels que

$$A \sim_G D \subseteq B \sim_G F \subseteq C.$$

Notons $g : B \rightarrow F$ la bijection illustrant l'équidécomposabilité de B et F , alors comme $D \subseteq B$,

$$D \sim_G g(D) \subseteq F \subseteq C, \quad A \sim_G D \preceq C,$$

alors $A \preceq C$.

Proposition 3.2.5

Soient G un groupe agissant sur un ensemble X , $E \subseteq X$, alors :

- (i) E est G dédoublable ssi il existe $A, B \subseteq E$ disjoints tels que $A \sim_G E$ et $B \sim_G E$.
- (ii) Si $E' \subseteq X$, $E' \sim_G E$ et E est G dédoublable, alors E' est G dédoublable.

Démonstration :

- (i) $(\Rightarrow)$ Soient $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq E$ deux à deux disjoints et $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tels que $E = \bigsqcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i = \bigsqcup_{j=1}^m h_j \cdot B_j$.

Posons :

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subseteq E \text{ et } B = \bigsqcup_{j=1}^m B_j \subseteq E,$$

alors on a bien $A \sim_G E$ et $B \sim_G E$ et $A \cap B = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Si il existe $A, B \subseteq E$ disjoints tels que $A \sim_G E$ et $B \sim_G E$ alors il existe $(E_1, \dots, E_n)$, $(E'_1, \dots, E'_m)$ deux partitions de E , $(A_1, \dots, A_n)$, $(B_1, \dots, B_m)$ des partitions de A, B respectivement et $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tels que :

$$g_i \cdot A_i = E_i \text{ et } h_j \cdot B_j = E'_j,$$

et alors

$$E = \bigsqcup_{i=1}^n E_i = \bigsqcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i \text{ et } E = \bigsqcup_{j=1}^m h_j \cdot B_j,$$

E est G dédoublable.

- (ii) E' est G dédoublable, alors il existe $A, B \subseteq E$ tels que $A \sim_G E$ et $B \sim_G E$, alors par transitivité, $A \sim_G E'$ et $B \sim_G E'$, posons maintenant $g : E \rightarrow E'$ la bijection associée à $E \sim_G E'$ (cf propriété (i) 3.2.4).

Alors

$$g(A) \sim_G A \sim_G E', \quad g(B) \sim_G B \sim_G E',$$

$g(A), g(B) \subseteq E'$ disjoints car g est une bijection, alors E' est bien G dédoublable. $\square$

Théorème 3.2.6 (Théorème de Schröder-Bernstein)

Soient G un groupe agissant sur X et $A, B \subseteq X$.

Si $A \preceq B$ et $B \preceq A$, alors $A \sim_G B$.

On peut alors définir un ordre partiel $\leq$ sur les classes d'équivalences de $\sim_G$:

$$\forall A, B \subseteq X, [A] \leq [B] \iff A \preceq B.$$

Démonstration :

Par définition, il existe $B_1 \subseteq B$ et $A_1 \subseteq A$ tels que $A \sim_G B_1$ et $A_1 \sim_G B$.

Soient $f : A \rightarrow B_1$ et $g : A_1 \rightarrow B$ deux bijections traduisant l'équidécomposabilité de A

et B_1 et de A_1 et B .

Posons $C_0 = A \setminus A_1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = g^{-1} \circ f(C_n)$, et $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$.

Notons que $A \setminus C \subseteq A \setminus C_0 = A_1$, alors $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ car :

$$\begin{aligned}
y \in g(A \setminus C) &\iff \exists x \in A, x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n, y = g(x) \\
&\iff \exists x \in A, x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, x \notin C_0, y = g(x) \\
&\iff \exists x \in A \setminus C_0 = A_1, x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} g^{-1} \circ f(C_n), y = g(x) \\
&\iff \exists x \in A_1, y = g(x) \notin f(C) \\
&\iff y \in g(A_1) \setminus f(C) = B \setminus f(C).
\end{aligned}$$

Alors $A \setminus C \sim_G f(A \setminus C) = B \setminus f(C)$, mais $C \sim_G f(C)$ donc $(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C)$, d'où $A \sim_G B$. $\square$

Corollaire 3.2.7

Soit $E \subseteq X$, alors E est G dédoublable ssi il existe $A, B \subseteq E$ disjoints tels que $A \sqcup B = E$ et $A \sim_G E \sim_G B$.

Démonstration :

E est G dédoublable ssi il existe $A_1, B_1 \subseteq E$ disjoints tels que $A_1 \sim_G E \sim_G B_1$.

Or dans ce cas, $E \sim_G B_1 \subseteq E \setminus A_1 \subseteq E$ donc $E \preceq E \setminus A_1 \preceq E$, par Schöder-Bernstein, $E \sim_G E \setminus A_1$. Alors en posant $A = A_1$ et $B = E \setminus A_1$, c'est bon.

Le sens réciproque est direct. $\square$

Remarque : Si on considère $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n \subseteq E$ deux à deux disjoints qui interviennent dans la définition de dédoublabilité de E , on peut supposer qu'il forment une partition de E d'après le corollaire précédent.

On supposera par la suite que c'est toujours le cas.

Théorème 3.2.8

Soit $D \subseteq \mathbb{S}^2$ dénombrable, alors $\mathbb{S}^2 \sim_{SO_3(\mathbb{R})} \mathbb{S}^2 \setminus D$.

Démonstration :

Cherchons une rotation $\rho \in SO_3(\mathbb{R})$ telle que $(\rho^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ soient deux à deux disjoints.

Supposons qu'une telle rotation existe, alors en posant $D^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n(D)$, remarquons que $\rho(D^*) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1}(D) = D^* \setminus D$, et alors

$$\mathbb{S}^2 = (\mathbb{S}^2 \setminus D^*) \sqcup D^* \sim_{SO_3(\mathbb{R})} (\mathbb{S}^2 \setminus D^*) \sqcup \rho(D^*) = (\mathbb{S}^2 \setminus D^*) \sqcup D^* \setminus D = \mathbb{S}^2 \setminus D.$$

Pour trouver une telle rotation, fixons une droite vectorielle $l \subseteq \mathbb{R}^3$ telle que $D \cap l = \emptyset$ (existe car D est dénombrable), notons r_θ la rotation d'angle θ autour de l .

Pour tout $P \in D$, posons :

$$A(P) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid \exists j \in \mathbb{N}^*, r_{j\theta}(P) \in D\} \text{ et } A = \bigcup_{P \in D} A(P).$$

Alors $A = \bigcup_{P \in D} \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) \in D\}$.

Soient $j \in \mathbb{N}^*$, $P \in D$, montrons que $A_j(P) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) \in D\}$ est dénombrable. En effet,

$$\begin{aligned} A_j(P) &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) \in D\} \\ &= \bigcup_{d \in D} \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) = d\} \end{aligned}$$

Fixons $d \in D$, alors :

Ou bien $\{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) = d\} = \emptyset$: O.K.

Ou bien $\{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) = d\} \neq \emptyset$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $d = r_{j\alpha}(P)$, et alors :

$$\begin{aligned} \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) = d\} &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) = r_{j\alpha}(P)\} \\ &= \{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j(\theta-\alpha)}(P) = P\} \\ &= \alpha + \frac{2\pi}{j}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Alors $\{\theta \in \mathbb{R} \mid r_{j\theta}(P) = d\}$ est au plus dénombrable, d'où la dénombrabilité de $A_j(P)$.

Alors A aussi comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Prenons alors $\theta \in [0, 2\pi[\setminus A$, alors avec $\rho = r_\theta$, $\forall (j, P) \in \mathbb{N} \times D$, $\rho^j(P) \notin D$, i.e $\rho^j(D)$ et D sont disjoints, et donc les $(\rho^n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints. $\square$

Remarque : D'après le paradoxe de Hausdorff, on sait qu'il existe $D \subseteq \mathbb{S}^2$ dénombrable tel que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ est $SO_3(\mathbb{R})$ dédoublable, et comme $\mathbb{S}^2 \sim_G \mathbb{S}^2 \setminus D$ alors d'après la proposition (ii) 3.2.5, $\mathbb{S}^2$ est $SO_3(\mathbb{R})$ dédoublable.

Notons que quitte à considérer pour $r > 0$, $r \cdot \mathbb{S}^2$; la décomposition de $\mathbb{S}^2$ s'étend sur toute sphère de rayon $r > 0$ centrée en 0.

Notation : On note dans la suite G_3 le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 3.2.9 (Théorème de Banach-Tarski, version faible)

La boule unité fermée est G_3 dédoublable.

Plus généralement, toute boule fermée dans $\mathbb{R}^3$ est G_3 dédoublable.

De plus, $\mathbb{R}^3$ est G_3 dédoublable.

Démonstration :

Il suffit de travailler sur des boules centrées en 0 car G_3 contient toutes les translations.

On s'intéresse au cas de la boule unité fermée, les autres cas se traitent de manière analogue.

La décomposition de $\mathbb{S}^2$ s'étend sur $B \setminus \{0\}$ via la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{P}(\mathbb{S}^2) &\rightarrow \mathcal{P}(B) \\ A &\mapsto \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} \alpha A \end{aligned}$$

En effet, si $A, C \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ sont disjoints, alors $\psi(A) \cap \psi(C) = \emptyset$ car s'il existe $x \in \psi(A) \cap \psi(C)$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, 1]$ et $(a, c) \in A \times C$ tels que $x = \alpha_1 a = \alpha_2 c$ et alors en passant à la norme, $\alpha_1 = \alpha_2$, alors $a = c \in A \cap C$, c'est absurde.

De plus pour $A, C \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$ et $g, h \in G_3$, alors $\psi(g \cdot A \cup h \cdot C) = (g \cdot \psi(A)) \cup (h \cdot \psi(C))$ par les propriétés de la réunion, donc $B \setminus \{0\}$ est G_3 dédoublable.

Il reste à montrer que $B \setminus \{0\} \sim_G B$.

Soit l la droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ contenue dans le plan $(0, x, z)$, et soit ρ une rotation d'ordre infini autour de l (il suffit de prendre une rotation d'angle un multiple irrationnel de 2π autour de l).

Posons :

$$D = \{\rho^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

comme ρ est d'ordre infini, chaque $\rho^n(0)$ est distinct, alors $\rho(D) = D \setminus \{0\}$ et donc

$$B = (B \setminus D) \sqcup D \sim_{G_3} (B \setminus D) \sqcup D \setminus \{0\} = B \setminus \{0\},$$

d'où B est G_3 dédoublable. □

Remarque : On peut reformuler le paradoxe de Banach-Tarski de la manière suivante :

Pour $B \subseteq \mathbb{R}^3$ une boule fermée, soient B_1, B_2 deux copies disjointes de B , alors :

$$B_1 \sqcup B_2 \sim_G B.$$

En effet, comme B est dédoublable, il existe $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq B$ une partition de B et $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G_3$ tels que :

$$B = \bigsqcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i = \bigsqcup_{j=1}^m h_j \cdot B_j.$$

Soient B_1, B_2 deux copies disjointes de B (i.e $B_1 = g \cdot B$ et $B_2 = h \cdot B$ où $g, h \in G_3$) alors :

$$B_1 \sqcup B_2 = \left(\bigsqcup_{i=1}^n g g_i \cdot A_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^m h h_j \cdot B_j \right) \sim_G \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^m B_j \right) = B,$$

d'où $B_1 \sqcup B_2 \sim_G B$.

Théorème 3.2.10 (Théorème de Banach-Tarski, version forte)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ bornés tels que $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ et $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$, alors $A \sim_{G_3} B$.

Démonstration :

Montrons que $A \preceq B$. Soit $K, L \subseteq \mathbb{R}^3$ deux boules fermées telles que $A \subseteq K$ et $L \subseteq B$. Notons $r > 0$ le rayon de L .

On a $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r)$ et K est compact donc il existe $L_1, \dots, L_n$ n copies de L telles que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n L_i$.

Prenons maintenant S une réunion de n copies disjointes de L . Par le théorème de Banach-Tarski, $S \sim_G L$ et on a alors

$$A \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^n L_i \preceq S \sim_G L \subseteq B, \text{ d'où } A \preceq B.$$

De manière totalement analogue, $B \preceq A$ et alors par Schröder-Bernstein, $A \sim_{G_3} B$. □

3.3 Conséquence sur l'existence de certaines mesures

Définition 3.3.1

Soient G un groupe agissant sur un ensemble X et $E \subseteq X$.

(i) Une mesure $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ finiment additive est une application vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X) \text{ disjoints, } \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(ii) On dit que E est G *négligeable* si pour tout mesure $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ invariante sous l'action de G finiment additive telle que $\mu(E) < +\infty$, $\mu(E) = 0$.

Proposition 3.3.2

Si $E \subseteq X$ est G dédoublable, alors E est G négligeable.

Démonstration :

Soit $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ une mesure G invariante finiment additive telle que $\mu(E) < +\infty$. Soient $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \subseteq E$ deux à deux disjoints et $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ tels que :

$$E = \bigsqcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i = \bigsqcup_{j=1}^m h_j \cdot B_j.$$

Alors :

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^n \mu(g_i \cdot A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) \text{ et de même, } \mu(E) = \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m B_j\right).$$

Alors :

$$2\mu(E) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) + \mu\left(\bigsqcup_{j=1}^m B_j\right) = \mu\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^m B_j\right)\right) = \mu(E).$$

Alors $\mu(E) = 0$. □

Remarque : Cela implique que sur un ensemble $E \subseteq X$, G dédoublable, il ne peut pas exister de mesure G invariante finiment additive définie sur $\mathcal{P}(X)$ telle que $\mu(E) = 1$. C'est le sens direct du théorème de Tarski, nous allons démontrer le sens réciproque au chapitre 5.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, d'après le paradoxe de Banach-Tarski, il n'existe pas de telle mesure sur B la boule unité.

Plus encore, les pièces utilisées pour dédoubler la boule unité, notons les $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ ne sont pas Lebesgue mesurables.

En effet, avec $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ tels que :

$$B = \bigsqcup_{i=1}^m g_i \cdot A_i = \bigsqcup_{j=1}^n h_j \cdot B_j,$$

si elles l'étaient alors en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$,

$$\lambda(B) = \sum_{i=1}^n \lambda(g_i \cdot A_i) = \sum_{i=1}^m \lambda(A_i) \text{ et } \lambda(B) = \sum_{j=1}^n \lambda(B_j),$$

et donc :

$$2\lambda(B) = \lambda\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^m A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^n B_j\right)\right) = \lambda(B),$$

or $\lambda(B) \in]0, +\infty[$, c'est donc impossible.

Chapitre 4

Eléments de théorie des graphes

4.1 Définitions

(i) Un *graphe* G est constitué d'un ensemble V de *sommets* (éventuellement infini) et d'un ensemble E d'*arêtes*. On note $G = (V, E)$.

On note une arête $u \leftrightarrow v \in E$ avec $u, v \in V$, il peut éventuellement y avoir plusieurs arêtes reliant deux sommets.

(ii) Un graphe *simple* est un graphe sans arêtes multiples et sans boucles, i.e pour tout $u \in V, u \leftrightarrow u \notin E$.

Sauf indication contraire, on considérera dans la suite qu'un graphe est un graphe simple.

(iii) Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition (A, B) de V telle que toute arête à une extrémité dans A et l'autre dans B .

(iv) Soit $u \in V$, un *voisin* de u est un sommet $v \in V$ tel que $u \leftrightarrow v \in E$.

On note pour $A \subseteq V$, $N_G(A) = \{v \in V \setminus A \mid \exists u \in A, u \leftrightarrow v \in E\}$

(v) Soit $A \subseteq V$, un graphe est *localement fini* en A si tous les sommets de A ont un nombre fini de voisins.

(vi) Un *couplage* est un ensemble d'arêtes disjointes d'un graphe, i.e un ensemble d'arêtes n'ayant aucun sommet commun.

(vii) On dit qu'un couplage *recouvre* $A \subseteq V$ si toutes les arêtes de A sont atteintes par une arête du couplage.

(viii) Soit G un graphe biparti de parties A, B , alors pour $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, on note $G(A', B')$ le graphe induit par les sommets de A et B , i.e le graphe constitué des sommets de $A' \cup B'$ et des arêtes reliant les sommets de A et B .

Remarque : On peut représenter un couplage recouvrant un ensemble $A \subseteq V$ par une fonction $f : A \rightarrow V$ sans point fixe injective.

En effet, $M = \{x \leftrightarrow f(x) \mid x \in A\}$ forme un couplage dans ce cas, l'absence de points fixes découle de fait qu'il n'y a pas de boucles dans un graphe simple, l'injectivité elle vient du fait que toutes les arêtes du couplage n'ont pas de sommet commun.

4.2 Théorème de Hall

Théorème 4.2.1 (Théorème de Hall, version finie)

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini biparti, de parties (A, B) .

G admet un couplage recouvrant A ssi pour tout $S \subseteq A$, $|N_G(S)| \geq |S|$.

On dit que A vérifie la propriété du mariage (PM).

Démonstration :

($\Rightarrow$) Si G admet un couplage couvrant A , alors tous les sommets de $S \subseteq A$ ont au moins un voisin dans B , alors $|N_G(S)| \geq |S|$.

($\Leftarrow$) Supposons que A vérifie (PM). On procède par récurrence sur le cardinal de A .

Si $|A| = 1$, notons $A = \{a\}$ alors $|N_G(A)| \geq 1$, il suffit alors de prendre un voisin $b \in B$ de a et alors $\{a \leftrightarrow b\}$ est un couplage recouvrant A .

Soit $|A| > 1$, supposons que pour tout $A' \subseteq A$, $A' \neq \emptyset$, tel que $|A'| < |A|$ et A' vérifie (PM), alors A' admet un couplage recouvrant A' .

On procède par disjonction de cas :

Si pour tout $S \subsetneq A$, $S \neq \emptyset$, $|N_G(S)| \geq |S| + 1$, alors prenons $a \leftrightarrow b \in E$ et considérons $G' = G(A \setminus \{a\}, B \setminus \{b\})$, alors pour tout $S \subseteq A'$, $|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|$, alors A' vérifie (PM) sur G' et donc il existe M' un couplage recouvrant A' dans G' par hypothèse de récurrence. Il suffit de poser $M = M' \cup \{a \leftrightarrow b\}$, c'est un couplage recouvrant A dans G .

Sinon, il existe $A' \subsetneq A$, $A' \neq \emptyset$ tel que $|N_G(A')| \leq |A'|$, or $A' \subseteq A$ donc $|N_G(A')| \geq |A'|$, donc $|N_G(A')| = |A'|$.

Posons $G' = G(A', N_G(A'))$, alors A' vérifie (PM) et $|A'| < |A|$ donc par hypothèse de récurrence, il existe M' un couplage de A' dans G' .

Considérons maintenant $G'' = G(A \setminus A', B \setminus N(A'))$, supposons par l'absurde qu'il existe un $S \subseteq A \setminus A'$ tel que $|N_{G''}(S)| < |S|$, alors $|N_G(A' \cup S)| \leq |N_G(A')| + |N_{G''}(S)| < |A'| + |S| = |A' \cup S|$, c'est absurde car $A' \cup S \subseteq A$ et A vérifie (PM).

Alors pour tout $S \subseteq A \setminus A'$, $|N_{G''}(S)| \geq |S|$, et par hypothèse de récurrence il existe M'' un couplage recouvrant $A \setminus A'$ dans G'' , et alors $M = M' \cup M''$ est un couplage recouvrant A dans G , d'où l'hérédité. $\square$

Théorème 4.2.2 (Théorème de Hall, version infinie)

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti de parties (A, B) , localement fini en A .

G admet un couplage recouvrant A ssi pour tout $S \subseteq A$ fini, $|N_G(S)| \geq |S|$.

De même on dit que A vérifie (PM).

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que G admette un couplage recouvrant A .

Soit $S \subseteq A$ fini, notons $k = |S|$ alors il y a au moins k arêtes sortant de S , alors $|N_G(S)| \geq |S|$

($\Leftarrow$) Supposons que A vérifie (PM).

Munissons B de la topologie discrète (i.e tout ensemble est ouvert dans B et les ensembles compacts sont les ensembles finis). Notons pour $a \in A$, $N(a) = N_G(\{a\}) \subseteq B$, c'est un ensemble fini car G est localement fini en A , alors $N(a)$ est compact.

Par le théorème de Thykhonov (cf théorème 2.2.14), $Y = \prod_{a \in A} N(a)$ est compact pour la topologie produit sur B^A .

Soit $H \subseteq A$ fini non vide, posons :

$$M(H) = \{f \in Y \mid f|_H \text{ est un couplage recouvrant } H\} = \{f \in Y \mid f|_H \text{ est injective}\}.$$

Par le théorème de Hall version finie, $M(H) \neq \emptyset$ car H vérifie (PM). De plus, $M(H)$ est fermé car :

$$\begin{aligned} Y &= \{f \in Y \mid f|_H \text{ est injective}\} \\ &= \{f \in Y \mid \forall a, b \in H \text{ tels que } a \neq b, f(a) \neq f(b)\} \\ &= \bigcap_{a, b \in H, a \neq b} \{f \in Y \mid f(a) \neq f(b)\} \\ &= \bigcap_{a, b \in H, a \neq b} \psi_a^{-1}(\{f(b)\}^c) \end{aligned}$$

où $\forall a \in A$, $\psi_a : \begin{matrix} B^A & \longrightarrow & B \\ f & \longmapsto & f(a) \end{matrix}$ est la projection sur la $a^{\text{ième}}$ coordonnée.

Elle est donc continue par rapport à la topologie produit sur B^A . De plus, $\{f(b)\}^c$ est fermé par rapport à la topologie discrète, et donc Y également, et alors $M(H) \subseteq Y$ est fermé, inclus dans un compact.

De plus, $\{M(H) \mid H \subseteq A \text{ fini}\}$ a la propriété d'intersection finie non vide car pour $H_1, \dots, H_n \subseteq A$ finis, $M(H_1 \cup \dots \cup H_n) \subseteq \bigcap_{i=1}^n M(H_i)$ et $M(H_1 \cup \dots \cup H_n) \neq \emptyset$ par le théorème de Hall version finie.

Alors comme Y est compact, $\bigcap_{H \subseteq A, \text{fini}} M(H) \neq \emptyset$.

Prenons alors $g \in \bigcap_{H \subseteq A, \text{fini}} M(H) \neq \emptyset$, g est un couplage recouvrant A car pour $x, y \in A$ tels que $x \neq y$, g est un couplage recouvrant $\{x, y\}$, i.e $g(x) \neq g(y)$, donc g est injective, c'est un couplage recouvrant A . $\square$

Chapitre 5

Le semi-groupe des types d'équidécomposabilité

5.1 Définition, loi additive

Définition 5.1.1

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X .

Posons $X^* = X \times \mathbb{N}$ et $G^* = \{(g, \pi) \mid g \in G, \pi \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}} \text{ à support fini}\}$.

Le groupe G^* agit sur X^* via l'action : $(g, \pi) \cdot (x, n) = (g \cdot x, \pi(n))$.

Si $A \subseteq X^*$, alors $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists (x, n) \in A\}$ sont appelés les *niveaux* de A .

Remarque : Les relations de G équidécomposabilité et de G^* équidécomposabilité sont assez liées, en effet, pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $E_1, E_2 \subseteq X$, $E_1 \sim_G E_2 \iff E_1 \times \{n\} \sim_{G^*} E_2 \times \{m\}$. Essayons de caractériser la dédoublabilité à l'aide du groupe défini ci dessus.

Définitions 5.1.2

Soit $A \subseteq X^*$, on dit que A est *borné* s'il n'a qu'un nombre fini de niveaux.

Soit $A \subseteq X^*$ borné, on note $[A]$ la classe d'équivalence de A par rapport à la relation $\sim_{G^*}$, c'est le *type* de A .

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des types des sous ensembles bornés de X^* .

Soient $[A], [B] \in \mathcal{S}$, alors on définit $[A] + [B] = [A \cup B']$, où $B' = \{(b, m+k) \mid (b, m) \in B\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ fixé, suffisamment grand pour que les niveaux de B' soient disjoints de ceux de A .

Remarque : On gardera dans la suite du chapitre ces notations.

De plus pour $E \subseteq X$, on note $[E] = [E \times \{0\}]$.

Démonstration :

Montrons la bonne définition de $[A] + [B]$:

Soit $A' \sim_{G^*} A$, alors quitte à prendre un $k \in \mathbb{N}$ plus grand dans la définition de B' , on

peut supposer que $A \cap B' = A' \cap B' = \emptyset$, alors on a $A \sqcup B' \sim_{G^*} A' \sqcup B'$, et donc :

$$[A] + [B] = [A \sqcup B'] = [A' \sqcup B'] = [A'] + [B].$$

Donc la loi ne dépend pas du choix de A .

Posons :

$$B' = \{(b, m + k) \mid (b, m) \in B\} \text{ et } B'' = \{(b, m + l) \mid (b, m) \in B\}.$$

Avec $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$ tels que les niveaux de B' et B'' soient disjoints de ceux de A .

Alors comme $(e, \sigma) \cdot (B') = B''$ avec σ une permutation de $\mathbb{N}$ qui envoie $m + l$ sur $m + k$ pour tout m niveau de B , on a donc $B' \sim_{G^*} B''$, d'où $A \sqcup B' \sim_{G^*} A \sqcup B''$, et donc :

$$[A] + [B] = [A \sqcup B'] = [A \sqcup B''].$$

Cette loi ne dépend pas du choix de $k \in \mathbb{N}$ pour définir B' .

La loi est commutative, en effet si on pose :

$$A' = \{(a, m + k) \mid (a, m) \in A\},$$

avec $k \in \mathbb{N}$ tel que les niveaux de A' et B soient disjoints, si on définit de la même manière B' , alors on a :

$$A \sim_{G^*} A' \text{ et } B \sim_{G^*} B',$$

de plus comme $A \cap B' = A' \cap B = \emptyset$, alors $A \cup B' \sim_{G^*} B \cup A'$ et donc :

$$[A] + [B] = [A \cup B'] = [B \cup A'] = [B] + [A].$$

Pour finir si $B \sim_{G^*} B'$ alors par la commutativité de la loi,

$$[A] + [B] = [B] + [A] = [B'] + [A].$$

Donc la loi ne dépend pas du choix de B . □

Remarque : De plus, la loi $+$ sur $\mathcal{S}$ est associative. Montrons le.

Notons pour $A, B \subseteq X^*$,

$$T_A(B) = \{(b, m + k) \mid (b, m) \in B\},$$

où $k \in \mathbb{N}$ est tel que les niveaux de A et B sont disjoints.

Soient $A, B, C \subseteq X^*$ bornés, alors :

$$([A] + [B]) + [C] = [A \cup T_A(B)] + [C] = [C \cup T_C(A \cup T_A(B))] = [C \cup T_C(A) \cup T_C(T_A(B))]$$

$$\text{et } [A] + ([B] + [C]) = [A] + [B \cup T_B(C)] = [A \cup T_A(B \cup T_B(C))] = [A \cup T_A(B) \cup T_A(T_B(C))]$$

Quitte a choisir des entiers adéquats en translatant les niveaux, toutes les réunions sont disjointes, et comme :

$$A \sim_{G^*} T_C(A), T_A(B) \sim_{G^*} T_C(T_A(B)) \text{ et } C \sim_{G^*} T_A(T_B(C)),$$

$$\text{alors } C \sqcup T_C(A) \sqcup T_C(T_A(B)) \sim_{G^*} A \sqcup T_A(B) \sqcup T_A(T_B(C)),$$

et donc $([A] + [B]) + [C] = [A] + ([B] + [C])$.

Notons de plus que $[\emptyset]$ est l'élément neutre de $\mathcal{S}$.

Alors $(\mathcal{S}, +)$ a une structure de semi-groupe commutatif, c'est le *semi-groupe des types d'équidécomposabilité*.

Pour $A \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $n[A] = \underbrace{[A] + \cdots + [A]}_{n \text{ fois}}$.

Propriété 5.1.3

Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $n, m \in \mathbb{N}$, alors :

- (i) $n(m\alpha) = (nm)\alpha$
- (ii) $(n + m)\alpha = n\alpha + m\alpha$
- (iii) $n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$

Démonstration :

Direct, (iii) découle de la commutativité de $+$. □

On va maintenant ordonner $\mathcal{S}$.

Définition 5.1.4

Soient $[A], [B] \in \mathcal{S}$, alors $[A] \leq [B]$ s'il existe $C \in \mathcal{S}$ tel que $[B] = [A] + [C]$.

Une autre définition consiste à dire que $[A] \leq [B]$ si $A \preceq B$.

C'est une relation d'ordre.

Démonstration :

Les deux définitions sont équivalentes, en effet s'il existe $C \in \mathcal{S}$ tel que $[A] + [C] = [B]$, alors $A \subseteq A \cup C' \sim_{G^*} B$ donc $A \preceq B$.

Réciproquement, si $A \preceq B$ alors il existe $C \subseteq B$, $A \sim_{G^*} C$ et donc $[A] + [B \setminus C] = [A \cup (B \setminus C)'] = [C \cup (B \setminus C)'] = [C \cup (B \setminus C)] = [B]$.

Cela nous donne directement que c'est une relation d'ordre, l'antisymétrie découle du théorème 3.2.6 (Schröder-Bernstein).

Propriété 5.1.5

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{S}$ et $n, m \in \mathbb{N}$, alors :

- (i) $\alpha \leq \beta \Rightarrow n\alpha \leq n\beta$
- (ii) $n \leq m \Rightarrow n\alpha \leq m\alpha$
- (iii) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Démonstration :

(i) Notons $\alpha = [A], \beta = [B]$, alors il existe $C \subseteq X^*$ tel que $[B] = [C] + [A]$, alors $n\beta = n[B] = n[C] + n[A] \geq n[A] = n\alpha$.

(ii),(iii) se traitent de la même manière. $\square$

Proposition 5.1.6

Soient $A, B \subseteq X^*$ bornés, alors $[A \cup B] \leq [A] + [B]$, avec égalité si $A \cap B = \emptyset$.

Démonstration :

Supposons que $A \cap B = \emptyset$, alors on a directement $[A \sqcup B] = [A \sqcup B'] = [A] + [B]$.

Dans le cas général, remarquons que $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$, alors :

$$\begin{aligned} [A] + [B] &= [(A \cap B) \sqcup (A \setminus B)] + [B] = [A \cap B] + [A \setminus B] + [B] \\ &= [A \cap B] + [(A \setminus B) \sqcup B] = [A \cap B] + [A \cup B] \end{aligned}$$

D'où $[A] + [B] \geq [A \cup B]$. $\square$

Théorème 5.1.7

Soit $E \subseteq X$, E est G dédoublable ssi $2[E] = [E]$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que E soit G dédoublable, alors il existe (A, B) une partition de E telle que $A \sim_G E \sim_G B$, alors :

$$2[E] = [E] + [E] = [A] + [B] = [A \sqcup B] = [E].$$

($\Leftarrow$) Supposons que $[E] = 2[E]$, alors $[E] = [(E \times \{0\}) \sqcup (E \times \{1\})] = [E \times \{0, 1\}]$, i.e $E \times \{0\} \sim_{G^*} E \times \{0, 1\}$.

Alors il existe $(C_i^*)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une partition de $E \times \{0, 1\}$,

$(A_i \times \{0\})_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une partition de $E \times \{0\}$

et $(g_i, \pi_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in G^{\{1, \dots, n\}}$ tels que :

$$C_i^* = (g_i, \pi_i) \cdot (A_i \times \{0\}) = g_i \cdot A_i \times \{\pi_i(0)\}.$$

Posons pour $k \in \{0, 1\}$, $J_k = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \pi_i(0) = k\}$, alors $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ et :

$$E \times \{0\} = \bigcup_{i \in J_0} g_i \cdot A_i \times \{0\} \text{ et } E \times \{1\} = \bigcup_{j \in J_1} g_j \cdot A_j \times \{1\},$$

et donc $E = \bigcup_{i \in J_0} g_i \cdot A_i = \bigcup_{j \in J_1} g_j \cdot A_j$, E est G dédoublable. $\square$

5.2 Loi de simplification

Théorème 5.2.1 (Loi de simplification)

Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $n\alpha = n\beta$, alors $\alpha = \beta$.

Démonstration :

Ce théorème découle du suivant en utilisant le théorème de Schröder-Bernstein. □

Théorème 5.2.2 (Loi de simplification faible)

Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $n\alpha \leq n\beta$, alors $\alpha \leq \beta$.

Démonstration : (On note $\sim_{G^*}$ sans G^*)

Supposons que $n\alpha \leq n\beta$.

Alors il existe $E, F \subseteq X^*$ disjoints, bornés de partition :

$$E = A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ et } F = B_1 \cup \dots \cup B_n \text{ tels que } [A_i] = \alpha, [B_i] = \beta \text{ et } E \sim E' \subseteq F.$$

Soient $\chi : E \rightarrow E'$ la bijection traduisant $E \sim E'$, et $\phi_i : A_1 \rightarrow A_i$, $\psi_i : B_1 \rightarrow B_i$ traduisant de même $A_1 \sim A_i$ et $B_1 \sim B_i$.

Pour tout $a \in A_1, b \in B_1$, posons :

$$\bar{a} = \{a, \phi_1(a), \dots, \phi_n(a)\} \text{ et } \bar{b} = \{b, \psi_1(b), \dots, \psi_n(b)\}.$$

Notons que $\{\bar{a} \mid a \in A_1\}, \{\bar{b} \mid b \in B_1\}$ forment une partition de E, F respectivement.

Formons un graphe biparti de parties $A = \{\bar{a} \mid a \in A_1\}$ et $B = \{\bar{b} \mid b \in B_1\}$. De chaque sommet $\bar{a} \in A$ sortent n arêtes (éventuellement multiples) telles que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \bar{a} \leftrightarrow \bar{b} \text{ quand } \chi \circ \phi_i(a) \in \bar{b}.$$

Chaque arête sortant de A est donc de degré n , et chaque sommet est au plus de degré n .

De plus A vérifie (PM). En effet, soit $Y \subseteq A$ de cardinal $k \in \mathbb{N}^*$, alors il y a kn arêtes sortant de Y vers $N_G(Y)$, supposons par l'absurde que $|N_G(Y)| < k$, alors il y a au plus (strictement) kn arêtes sortant de Y , c'est absurde, donc $|N_G(Y)| \geq k = |Y|$.

D'après le théorème de Hall (version infinie) il existe un couplage M recouvrant A , i.e pour tout $\bar{a} \in A$, il existe un unique $\bar{b} \in B$ tel que $\bar{a} \leftrightarrow \bar{b}$ vérifiant pour certains $i, j \in \{1, \dots, n\}, \chi \circ \phi_i(a) = \psi_j(b)$.

Posons alors :

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \{a \in A_1 \mid \bar{a} \leftrightarrow \bar{b} \in M \text{ et } \chi \circ \phi_i(a) = \psi_j(b)\} \\ \text{et } D_{ij} &= \{b \in B_1 \mid \bar{a} \leftrightarrow \bar{b} \in M \text{ et } \chi \circ \phi_i(a) = \psi_j(b)\}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \{b \in B_1 \mid \bar{a} \leftrightarrow \bar{b} \in M \text{ et } \chi \circ \phi_i(a) = \psi_j(b)\} \\ &= \{\psi_j^{-1} \circ \chi \circ \phi_i(a) \mid \bar{a} \leftrightarrow \bar{b} \in M \text{ et } \chi \circ \phi_i(a) = \psi_j(b)\} \\ &= \psi_j^{-1} \circ \chi \circ \phi_i(C_{ij}) \sim C_{ij}, \end{aligned}$$

or les (C_{ij}) partitionnent A_1 , alors :

$$A_1 = \bigcup_{ij} C_{ij} \sim \bigcup_{ij} D_{ij} \subseteq B_1, \text{ d'où } A_1 \preceq B_1, \text{ i.e } \alpha \leq \beta. \quad \square$$

Corollaire 5.2.3

Soit $\alpha \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $(n+1)\alpha \leq n\alpha$, alors $\alpha = 2\alpha$.

Démonstration :

$$n\alpha \geq (n+1)\alpha = n\alpha + \alpha \geq (n+1)\alpha + \alpha = n\alpha + 2\alpha.$$

En itérant, on obtient $n\alpha \geq 2(n\alpha) = n(2\alpha)$.

Par la loi de simplification, on a alors $\alpha \geq 2\alpha$, or $\alpha \leq 2\alpha$, donc $\alpha = 2\alpha$. □

Chapitre 6

Théorème de Tarski

Énoncé du théorème de Tarski

Soient G un groupe agissant sur X et $E \subseteq X$.

Alors il existe une mesure G invariante finiment additive $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu(E) = 1$ ssi E n'est pas G dédoublable.

Démonstration : (sens direct)

Supposons qu'il existe une telle mesure sur X , alors $\mu(E) = 1$ et donc E n'est pas G dédoublable. $\square$

Le sens réciproque nécessite plus de travail, c'est l'objet de ce chapitre.

6.1 Mesure et semi-groupe des types

Si on a une telle mesure μ sur X , alors elle induit une application

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{S} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ [A] &\longmapsto \sum \mu(A_n) \end{aligned} \quad \text{où } A = \bigcup A_n \times \{n\}.$$

ν est finiment additive.

Réciproquement, si $\nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ est finiment additive, alors

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow [0, +\infty] \\ A &\longmapsto \nu([A]) \end{aligned} \quad \text{est une mesure finiment additive } G \text{ invariante sur } X$$

Le semi groupe des types d'équidécomposabilité est donc un outil naturel pour la construction de certaines mesures.

Notations : Dans la suite on considérera $(\mathcal{T}, +)$ un semi-groupe commutatif, de neutre 0, avec un élément fixe $\epsilon \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$.

Notons que $\mathcal{T}$ est muni d'un préordre (un ordre ne vérifiant pas l'antisymétrie) naturel $\leq$ tel que :

$$\alpha \leq \beta \iff \exists \gamma \in \mathcal{S}, \beta = \alpha + \gamma.$$

De même il y a une multiplication naturelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n\alpha = \alpha + \cdots + \alpha, \text{ } n \text{ fois.}$$

Définition 6.1.1

Un élément $\alpha \in \mathcal{T}$ est *borné* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \leq n\epsilon$.

Remarque : On cherche ici à construire une application $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ finiment additive. On travaille dans un premier temps sur les éléments bornés de $\mathcal{T}$, on pourra ensuite étendre μ à $\mathcal{T}$ en attribuant une mesure infinie aux éléments non bornés.

On peut alors supposer sans perte de généralité que tous les éléments de $\mathcal{T}$ sont bornés.

Lemme 6.1.2

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$.

Soit $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$ fini contenant ϵ .

Alors il existe une fonction $\rho : \mathcal{T}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ telle que :

(i) $\rho(\epsilon) = 1$

(ii) Pour tout $\phi_1, \dots, \phi_m, \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathcal{T}_0$ tels que $\phi_1 + \dots + \phi_m \leq \theta_1 + \dots + \theta_n$, alors $\rho(\phi_1) + \dots + \rho(\phi_m) \leq \rho(\theta_1) + \dots + \rho(\theta_n)$.

Démonstration :

Par récurrence sur la taille de $\mathcal{T}_0$.

Si $|\mathcal{T}_0| = 1$, alors $\mathcal{T}_0 = \{\epsilon\}$, et donc $\rho : \epsilon \mapsto 1$ est l'application recherchée.

En effet, on a $\rho(\epsilon) = 1$, et pour $n, m \in \mathbb{N}$, montrons que si $m\epsilon \leq n\epsilon$, alors $m \leq n$.

Supposons que $n < m$, i.e $n+1 \leq m$ alors $(n+1)\epsilon \leq m\epsilon \leq n\epsilon$, ce qui contredit l'hypothèse, alors $m \leq n$.

Soit $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$ fini contenant ϵ tel que $|\mathcal{T}_0| > 1$.

Soit $\alpha \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\epsilon\}$ alors posons $\nu : \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant (i) et (ii) (par hypothèse de récurrence).

Alors comme tous les éléments de $\mathcal{T}_0$ sont bornés, alors ν ne prend que des valeurs finies, en effet :

$$\forall \beta \in \mathcal{T}_0, \exists n \in \mathbb{N}, \beta \leq n\epsilon \text{ et donc } \nu(\beta) \leq n\nu(\epsilon) = n, \text{ par (i) et (ii).}$$

Posons :

$$B_\alpha = \{(r, \beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbb{N} \times (\mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\})^{p+q} \mid \gamma_1 + \dots + \gamma_q + r\alpha \leq \beta_1 + \dots + \beta_p\}.$$

Et définissons :

$$\rho : \mathcal{T}_0 \rightarrow [0, +\infty] \text{ telle que } \rho|_{\mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}} = \nu$$

$$\text{et } \rho(\alpha) = \inf \left\{ \frac{1}{r} \left(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l) \right) \mid (r, \beta_k, \gamma_l) \in B_\alpha \right\}.$$

Remarquons que par (i) et (ii), $\rho(\alpha) \geq 0$, de plus il existe $n \in \mathbb{N}, \alpha \leq n\epsilon$ et alors $\rho(\alpha) \leq n\rho(\epsilon) = n$.

Montrons que ρ vérifie (i) et (ii) :

Soient $\phi_1, \dots, \phi_m, \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathcal{T}_0 \setminus \{\alpha\}$ et $s, t \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum \phi_i + s\alpha \leq \sum \theta_j + t\alpha$.

Si $s = t = 0$: c'est bon par hypothèse de récurrence.

Si $s = 0, t > 0$, alors $\sum \phi_i \leq \sum \theta_j + t\alpha$ (1).

Montrons que :

$$\sum \rho(\phi_i) \leq \sum \rho(\theta_j) + t\rho(\alpha) \text{ i.e } \rho(\alpha) \geq \frac{1}{t}(\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j)).$$

Soit $(r, \beta_k, \gamma_l) \in B_\alpha$, alors $\sum \gamma_l + r\alpha \leq \sum \beta_k$.

On fait $r(1)$, et on ajoute $t \sum \gamma_l$, alors :

$$r \sum \phi_i + t \sum \gamma_l \leq r \sum \theta_j + t(\sum \gamma_l + r\alpha) \leq r \sum \theta_j + t \sum \beta_k.$$

Et comme ν vérifie (ii), alors :

$$r \sum \nu(\phi)_i + t \sum \nu(\gamma_l) \leq r \sum \nu(\theta_j) + t \sum \nu(\beta_k),$$

et alors

$$\frac{1}{r}(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)) \geq \frac{1}{t}(\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j)),$$

et par passage à l'inf,

$$\rho(\alpha) \geq \frac{1}{t}(\sum \nu(\phi_i) - \sum \nu(\theta_j)),$$

d'où le résultat.

Sinon $\alpha > 0$, et alors on a $\sum \phi_i + s\alpha \leq \sum \theta_j + t\alpha$ (2).

montrons que $s\rho(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq z_1 + \dots + z_t + \sum \nu(\theta_j)$,

où $z_1, \dots, z_n \in \{\frac{1}{r}(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l)) \mid (r, \beta_k, \gamma_l) \in B_\alpha\}$.

Quitte à considérer le plus petit d'entre eux, on peut supposer que ce sont tous les mêmes, notons alors $z = \frac{1}{r}(\sum \nu(\beta_k) - \sum \nu(\gamma_l))$, où $(r, \beta_k, \gamma_l) \in B_\alpha$, montrons alors :

$$s\rho(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq tz + \sum \nu(\theta_j).$$

On fait $r(2)$ et on ajoute $t \sum \gamma_l$, alors :

$$r \sum \phi_i + t \sum \gamma_l + rs\alpha \leq r \sum \theta_j + t(r\alpha + \sum \gamma_j) \leq r \sum \theta_j + t \sum \beta_k,$$

alors

$$\rho(\alpha) \leq \frac{1}{rs}(r \sum \nu(\theta_j) + t \sum \nu(\beta_k) - r \sum \nu(\phi_i) - t \sum \nu(\gamma_l)),$$

et alors

$$s\rho(\alpha) + \sum \nu(\phi_i) \leq tz + \sum \nu(\theta_j),$$

d'où le résultat. □

Théorème 6.1.3

Soit $\epsilon \in \mathcal{T}$ fixé, alors les deux propositions sont équivalentes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$

(b) Il existe une application $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$ finiment additive telle que $\mu(\epsilon) = 1$.

Démonstration :

(b) $\Rightarrow$ (a) : Supposons qu'il existe une telle application μ .

Alors pour $\alpha \leq \beta$, $\mu(\alpha) \leq \mu(\beta)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)\epsilon \leq n\epsilon$, alors $\mu((n+1)\epsilon) \leq \mu(n\epsilon)$ et donc par additivité de μ , $n+1 \leq n$, c'est absurde, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Supposons maintenant que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)\epsilon \not\leq n\epsilon$.

Posons pour $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$ fini, contenant ϵ :

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}_0) = \{f \in [0, +\infty]^\mathcal{T} \mid f(\epsilon) = 1 \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathcal{T}_0, \alpha + \beta \in \mathcal{T}_0 \Rightarrow f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)\}.$$

Par le lemme précédent, il existe une fonction $\rho : \mathcal{T}_0 \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\rho(\epsilon) = 1$ et pour $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_0$ tels que $\alpha + \beta \in \mathcal{T}_0$, comme $\alpha + \beta \leq \alpha + \beta$, alors $\rho(\alpha) + \rho(\beta) \leq \rho(\alpha + \beta)$ et $\rho(\alpha + \beta) \leq \rho(\alpha) + \rho(\beta)$, d'où $\rho(\alpha + \beta) = \rho(\alpha) + \rho(\beta)$. Donc $\rho \in \mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$, $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0) \neq \emptyset$.

$\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ est fermé, en effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathcal{T}_0) &= \{f \in [0, +\infty]^\mathcal{T} \mid f(\epsilon) = 1 \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathcal{T}_0, \alpha + \beta \in \mathcal{T}_0 \Rightarrow f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)\} \\ &= \{f \in [0, +\infty]^\mathcal{T} \mid f(\epsilon) = 1\} \cap \left(\bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathcal{T}_0 \\ \alpha + \beta \in \mathcal{T}_0}} \{f \in [0, +\infty]^\mathcal{T} \mid f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)\} \right) \\ &= \psi_\epsilon^{-1}(\{1\}) \cap \left(\bigcap_{\substack{\alpha, \beta \in \mathcal{T}_0 \\ \alpha + \beta \in \mathcal{T}_0}} \psi_{\alpha + \beta}^{-1}(\{f(\alpha) + f(\beta)\}) \right) \end{aligned}$$

posons pour $a \in \mathcal{T}$, $\psi_a : [0, +\infty]^\mathcal{T} \longrightarrow [0, +\infty]$, continue pour la topologie produit car c'est la projection sur la $a^{\text{ième}}$ coordonnée. Alors $\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ est fermé comme intersection de fermés.

$\mathcal{M}(\mathcal{T}_0)$ vérifie la propriété d'intersections finies non vides car pour $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{T}$ finis, contenant ϵ alors $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ est fini et contient ϵ et donc $\mathcal{M}(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}_i) \neq \emptyset$ et $\mathcal{M}(\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}(\mathcal{T}_i)$ donc $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{M}(\mathcal{T}_i) \neq \emptyset$.

Alors par compacité de $[0, +\infty]^\mathcal{T}$ et par le théorème de Tykhonov, $[0, +\infty]^\mathcal{T}$ est compact et donc $\bigcap_{\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}, \text{fini}} \mathcal{M}(\mathcal{T}_0) \neq \emptyset$.

Prenons alors $\mu \in \bigcap_{\epsilon \in \mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}, \text{fini}} \mathcal{M}(\mathcal{T}_0) \neq \emptyset$, soient $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$, alors $\mu(\alpha + \beta) = \mu(\alpha) + \mu(\beta)$

car $\mu \in \mathcal{M}(\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\})$, et $\mu(\epsilon) = 1$ car $\mu \in \mathcal{M}(\{\epsilon\})$. □

Corollaire 6.1.3 (Théorème de Tarski)

Soient G un groupe agissant sur X et $E \subseteq X$.

Alors il existe une mesure G invariante finiment additive $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu(E) = 1$ ssi E n'est pas G dédoublable.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Déjà fait.

($\Leftarrow$) Supposons que E ne soit pas G dédoublable.

Soit $\mathcal{S}$ le semi-groupe des types d'équidécomposabilité de X .

D'après le corollaire 5.2.3 de la loi de simplification, comme E n'est pas dédoublable, i.e $[E] \neq 2[E]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)[E] \not\leq n[E],$$

et donc par le théorème précédent, il existe $\nu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ finiment additive telle que $\nu([E]) = 1$.

Posons pour $A \subseteq X$, $\mu(A) = \nu([A])$, alors on a bien :

$$\mu(E) = \nu([E]) = 1.$$

μ est finiment additive car pour $A, B \subseteq X$ disjoints,

$$\mu(A \sqcup B) = \nu([A \sqcup B]) = \nu([A] + [B]) = \nu([A]) + \nu([B]) = \mu(A) + \mu(B).$$

μ est bien G invariante car pour $g \in G$,

$$[g \cdot A] = [(g, id) \cdot (A \times \{0\})] = [A \times \{0\}] = [A],$$

d'où $\mu(g \cdot A) = \mu(A)$. □

Bibliographie

- [CM09] Sebastian M. CIOABĂ et M. Ram MURTY. *A first course in graph theory and combinatorics*. English. T. 55. Texts Read. Math. New Delhi : Hindustan Book Agency, 2009. ISBN : 978-81-85931-98-2.
- [TW16] Grzegorz TOMKOWICZ et Stan WAGON. *The Banach-Tarski paradox*. English. 2nd edition. T. 163. Encycl. Math. Appl. Cambridge : Cambridge University Press, 2016. ISBN : 978-1-107-04259-9 ; 978-1-107-61731-5 ; 978-1-107-33714-5. DOI : 10.1017/CB09781107337145.

Je me suis également appuyé sur des notes de cours de Julien Melleray.