Contrôle du 15 mars

Barème : (sur 44,5 points)
Exercice 1. (3 points)
Exercice 2. (9 points)
Exercice 3. (10 points)
Exercice 4. (7 points)
Exercice 5. (15,5 points)

Exercice 1. (question de cours)

Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers F. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Correction exercice 1.

Vérifions tout d'abord que $0_F = u\left(0_{E_1}\right) \in u(E_1)$

Soient y_1 et y_2 deux vecteurs de $u(E_1)$, et λ_1 et λ_2 deux scalaires. Il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_1$ tels que $y_1 = u(x_1)$ et $y_2 = u(x_2)$, on a alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in u(E_1)$ car $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_1$, en effet E_1 est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2.

Pour une matrice à une ligne et une colonne de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ on posera $(a) = a$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soient $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer ${}^tPP$, en déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$
3. Calculer ${}^tXAX$
4. On pose $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

   Calculer ${}^tX'DX'$ et montrer que ce réel est strictement positif pour $X' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tXAX \geq 0$.

   Indication : on pourra utiliser les questions précédentes.

Correction exercice 2.

1.

$$ {}^tPP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I $$

Donc P est inversible et

$$ P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} $$

2.

$$D=P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-1&2&2\\2&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}6&6&-3\\-6&12&12\\18&-9&18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&2&-1\\-2&4&4\\6&-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&18&0\\0&0&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6x_1-2x_2+2x_3\\-2x_1+5x_2\\2x_1+7x_3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{3}\big(x_1(6x_1-2x_2+2x_3)+x_2(-2x_1+5x_2)+x_3(2x_1+7x_3)\big)$$
$$=\frac{1}{3}(6x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_2+5x_2^2+2x_1x_3+7x_3^2)$$
$$=\frac{1}{3}(6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3)$$

4.

$${}^tX'DX'={x_1'}^2+2{x_2'}^2+3{x_3'}^2>0$$

Pour x_1', x_2' et x_3' non tous nuls

$${}^tX'DX'={}^tX'P^{-1}APX'={}^tX'{}^tPAPX'={}^t(PX')A(PX')={}^tXAX$$
$${}^tXAX={}^tX{}^tPDP\,X={}^t(PX)D(PX)={}^tX'DX'={x_1'}^2+2{x_2'}^2+3{x_3'}^2\geq 0$$

Exercice 3.

Soient $a=(2,-1,1,2)$, $b=(2,-1,6,1)$ et $c=(6,-3,8,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Soient $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,-7x+z+5t=0\ \text{ et }\ x+y=0\}$ et $F=Vect(a,b,c)$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E\oplus F=\mathbb{R}^4$?

Correction exercice 3.

1.

$$u=(x,y,z,t)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}-7x+z+5t=0\\x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7x+z+5t=0\\y=-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=7x-5t\\y=-x\end{cases}$$

Donc il existe z et t réels tels que :

$$u=(x,-x,7x-5t,t)=x(1,-1,7,0)+t(0,0,-5,1)$$

On pose $d=(1,-1,7,0)$ et $e=(0,0,-5,1)$,

Alors $E=Vect(d,e)$ c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$F=Vect(a,b,c)$ est par nature un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2. la famille (d,e) est libre car d et e ne sont pas proportionnels, d'autre par la famille (d,e) engendre E il s'agit donc d'une base de E.

   La famille (a,b,c) engendre F, le problème est de savoir si elle est libre.

   Pour tout α,β et γ réels

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(2,-1,1,2)+\beta(2,-1,6,1)+\gamma(6,-3,8,5)=(0,0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 2\alpha+2\beta+6\gamma=0 \\ -\alpha-\beta-3\gamma=0 \\ \alpha+6\beta+8\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta+5\gamma=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2+L_1 \\ 2L_3-L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} 2\alpha+2\beta+6\gamma=0 \\ 0=0 \\ 10\beta+10\gamma=0 \\ -\beta-\gamma=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2\alpha+2\beta+6\gamma=0 \\ -\beta-\gamma=0 \end{matrix}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \beta=-\gamma \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha=-2\gamma \\ \beta=-\gamma \end{matrix}\right.$$

La famille est donc liée, si on prend $\gamma=-1$ alors $\alpha=2$ et $\beta=1$ et on a :

$$2a+b-c=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow c=2a+b$$
$$F=Vect(a,b,c)=Vect(a,b,2a+b)=Vect(a,b)$$

la famille (a,b) est libre car a et b ne sont pas proportionnels, d'autre par la famille (a,b) engendre F il s'agit donc d'une base de F.

3. On a $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4=\dim(\mathbb{R}^4)$ donc le tout est de savoir si $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$?
   On a une base de E (d,e) et une base de F (a,b) et on se pose la question de savoir si (d,e,a,b) est une base de $\mathbb{R}^4$. Pour tout α,β,γ et δ réels
   $$\alpha d+\beta e+\gamma a+\delta b=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(1,-1,7,0)+\beta(0,0,-5,1)+\gamma(2,-1,1,2)+\delta(2,-1,6,1)=(0,0,0,0)$$
   $$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \alpha+2\gamma+2\delta=0 \\ -\alpha-\gamma-\delta=0 \\ 7\alpha-5\beta+\gamma+6\delta=0 \\ \beta+2\gamma+\delta=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2+L_1 \\ L_3-7L_1 \\ L_4 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \alpha+2\gamma+2\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \\ -5\beta-13\gamma-8\delta=0 \\ \beta+2\gamma+\delta=0 \end{matrix}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_4 \\ L_3 \\ L_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \alpha+2\gamma+2\delta=0 \\ \beta+2\gamma+\delta=0 \\ -5\beta-13\gamma-8\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_4 \\ L_3+5L_2 \\ L_2 \end{matrix}\left\{\begin{matrix} \alpha+2\gamma+2\delta=0 \\ \beta+2\gamma+\delta=0 \\ -3\gamma-3\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha+2\gamma+2\delta=0 \\ \beta+2\gamma+\delta=0 \\ \gamma+\delta=0 \end{matrix}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha=-2\gamma-2\delta \\ \beta=-2\gamma-\delta \\ \gamma=-\delta \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=\delta \\ \gamma=-\delta \end{matrix}\right.$$
   Donc la famille est liée, par exemple si on prend $\delta=1$ alors $\beta=1$ et $\gamma=-1$ ce qui montre que
   $$e-a+b=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow e=a-b\in E\cap F$$
   Ce qui pouvait éventuellement se voir directement.
   On n'a pas $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.

Exercice 4.

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes.
Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA=A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\dim\left(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})\right)$.

Correction exercice 4.

1. Première méthode
   Soient $A\in\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$et $B\in\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$et soient λ et μ deux réels.
   La matrice nulle O vérifie ${}^tO=O$
   ${}^t(\lambda A+\mu B)=\lambda{}^tA+\mu{}^tB=\lambda A+\mu B=\lambda A+\mu B$
   Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Deuxième méthode
   Soit

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$A\in\mathcal{S}_3(\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a_{1,2}=a_{2,1} \\ a_{1,3}=a_{3,1} \\ a_{2,3}=a_{3,2} \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} A&=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &=a_{1,1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{2,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{3,3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+a_{2,1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+a_{3,1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_{3,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &=a_{1,1}E_{1,1}+a_{2,2}E_{2,2}+a_{3,3}E_{3,3}+a_{2,1}\left(E_{2,1}+E_{1,2}\right)+a_{3,1}\left(E_{3,1}+E_{1,3}\right) \\ &+a_{3,2}\left(E_{3,2}+E_{2,3}\right) \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$\mathcal{S}_3(\mathbb{R})=Vect\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{3,3},E_{2,1}+E_{1,2},E_{3,1}+E_{1,3},E_{3,2}+E_{2,3}\right)$$

Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Il reste à montrer que cette famille est libre, pour tout α_i, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$

$$\alpha_1E_{1,1}+\alpha_2E_{2,2}+\alpha_3E_{3,3}+\alpha_4\left(E_{2,1}+E_{1,2}\right)+\alpha_5\left(E_{3,1}+E_{1,3}\right)+\alpha_6\left(E_{3,2}+E_{2,3}\right)=O$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_6 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\forall i\in\{1,2,3,4,5,6\},\alpha_i=0$$

La famille $\left(E_{1,1},E_{2,2},E_{3,3},E_{2,1}+E_{1,2},E_{3,1}+E_{1,3},E_{3,2}+E_{2,3}\right)$ est libre, de plus elle engendre $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ par conséquent c'est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\dim\left(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})\right)=6$

Exercice 5.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $u=(x,y,z)$ associe le vecteur

$$p(u)=(2x+y+2z,y,-x-y-z)$$

Soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2=p\circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$, que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u\in\mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $Im(p)$ et une base de $\ker(p-Id)$, montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p)\oplus Im(p)=\mathbb{R}^3$

Correction exercice 5.

1. Soient $u=(x,y,z)$ et $u'=(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soient λ et λ' deux réels

$$\lambda u+\lambda'u'=(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y',\lambda z+\lambda'z')$$

$$p(\lambda u+\lambda' u')=\left(2(\lambda x+\lambda' x')+\lambda y+\lambda' y'+2(\lambda z+\lambda' z'),\lambda y+\lambda' y',-(\lambda x+\lambda' x')-(\lambda y+\lambda' y')-(\lambda z+\lambda' z')\right)$$
$$=(\lambda(2x+y+2z)+\lambda'(2x'+y'+2z'),\lambda y+\lambda' y',\lambda(-x-y-z)+\lambda'(-x'-y'-z')$$
$$=\lambda(2x+y+2z,y,-x-y-z)+\lambda'(2x'+y'+2z',y',-x'-y'-z')$$
$$=\lambda p(u)+\lambda' p(u')$$

p est une application linéaire.

2.

$$p(e_1)=(2,0,-1)=2e_1-e_3;p(e_2)=(1,1,-1)=e_1+e_2-e_3;p(e_3)=(2,0,-1)=2e_1-e_3$$
$$p^2(e_1)=p\big(p(e_1)\big)=p(2e_1-e_3)=2p(e_1)-p(e_3)=2(2e_1-e_3)-(2e_1-e_3)=2e_1-e_3=p(e_1)$$
$$p^2(e_2)=p\big(p(e_2)\big)=p(e_1+e_2-e_3)=p(e_1)+p(e_2)-p(e_3)$$
$$=2e_1-e_3+e_1+e_2-e_3-(2e_1-e_3)=e_1+e_2-e_3=p(e_2)$$
$$p^2(e_3)=p\big(p(e_3)\big)=p(2e_1-e_3)=2p(e_1)-p(e_3)=2(2e_1-e_3)-(2e_1-e_3)=2e_1-e_3=p(e_3)$$

Donc pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, $p^2(u)=p(u)$ et donc $p^2=p$

3.

$$Im(p)=vect\big(p(e_1),p(e_2),p(e_3)\big)=vect\big(p(e_1),p(e_2)\big)$$

$\big(p(e_1),p(e_2)\big)$ est une famille de vecteurs non colinéaires, elle est donc libre, de plus elle engendre $Im(p)$, c'est une base de $Im(p)$.

$$u=(x,y,z)\in\ker(p-Id)\Leftrightarrow(p-Id)(u)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow p(u)-u=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow p(u)=u$$
$$\Leftrightarrow(2x+y+2z,y,-x-y-z)=(x,y,z)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+2z=x\\ y=y\\ -x-y-z=z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ y=y\\ -x-y-2z=z\end{cases}\Leftrightarrow x+y+2z=0\Leftrightarrow x=-y-2z$$
$$u=(-y-2z,y,z)=y(-1,1,0)+z(-2,0,1)=y(-e_1-2e_3)+z(-2e_1+e_3)$$
$$\ker(p-Id)=Vect(-e_1-2e_3,-2e_1+e_3)$$

$(-e_1-2e_3,-2e_1+e_3)$ est une famille de vecteurs non colinéaires, elle est donc libre, de plus elle engendre $Im(p)$, c'est une base de $\ker(p-Id)$

Les composantes de $\big(p(e_1),p(e_2)\big)$ vérifient $x+y+2z=0$ donc $Im(p)\subset\ker(p-Id)$ et comme ces deux sous-espaces vectoriels sont de dimension 2 ils sont égaux.

4. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(p))+\dim\big(Im(p)\big)=\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

Si $u\in\ker(p)\cap Im(p)=\ker(p)\cap\ker(p-Id)$ alors $p(u)=0_{\mathbb{R}^3}$ et $p(u)=u$ donc $u=0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui montre que $\ker(p)\cap Im(p)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et par conséquent

$$\ker(p)\oplus Im(p)=\mathbb{R}^3$$