Séries de fonctions

Exercice 1.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $[0,1[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,a]$ où $a \in]0,1[$.
3. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1[$.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$$

1. Etudier la convergence simple de cette série sur $]0,+\infty[$.
2. Etudier la convergence uniforme de cette série sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonction $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1]$, puis sur $[0,a]$ avec $a \in]0,1[$.
2. $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,a]$ avec $a > 0$.
3. $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4. On considère la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} f_n \qquad \text{avec} \qquad f_n(x) = \frac{(-1)^n x^2}{x^4+n}$$

1. Etudier la convergence simple de la série sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe aucune partie de $\mathbb{R}^*$ sur laquelle cette série est normalement convergente.
4. Montrer que cette série est continue.

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5. Montrer que la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a,a]$ où $a > 0$.
2. Montrer que cette série est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin(n^2 x)$$

Est dérivable.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8. On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9. Soit une suite de fonctions réelles définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(x+1)}$.

1. Montrer que la série de fonctions associée converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que cette série de converge uniformément sur $[0,1]$.
3. La série converge-t-elle normalement ?

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k} \frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

Déterminer le domaine de définition D' de g et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D'.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit $f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$ pour x un réel positif.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, $a>0$. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[0,+\infty[$ ou sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12. Continuité

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

$$f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\sin(nx)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13. Dérivation

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ avec $]0,+\infty[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14. Limite

On fixe $\alpha>0$ et on pose

$$f_n(x) = e^{-n^\alpha x} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Quel est le domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. Etudier

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

On pourra faire intervenir la série de fonctions (f_n) avec $f_n(x) = e^{-(n+1)x}\sin(x)$

Allez à : Correction exercice 15

Corrections

Correction exercice 1.

1. Pour tout $x \in [0,1[$, $x^2 \neq 1$

$$\sum_{n=0}^{N} x^{2n} = \sum_{n=0}^{N} (x^2)^n = \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2} \to \frac{1}{1-x^2}$$

Cette série de fonctions converge simplement vers la fonction $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

2. $\forall x \in [0,1[, |x^{2n}| \leq a^{2n}$, or la série de terme général a^{2n} converge (voir 1.) donc la série de fonction de terme général x^{2n} est normalement convergente sur $[0,a]$ par conséquent elle converge uniformément sur $[0,a]$.

3. Supposons que cette série de fonctions converge uniformément sur $[0,1[$ alors elle converge uniformément vers sa limite simple $S: x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \left|\frac{1}{1-x^2} - \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2}\right| = \frac{x^{2N+2}}{1-x^2}$$

On considère la suite de terme général

$$x_N = 1 - \frac{1}{N}$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{e^{(2N+2)\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)}}{1-\left(1-\frac{2}{N}+\frac{1}{N^2}\right)} = \frac{e^{(2N+2)\left(-\frac{1}{N}+o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}}{\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}} = N^2\frac{e^{-2+o(1)}}{2N-1} \sim \frac{N}{2e} \to +\infty$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,1[}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \sum_{n=0}^{N} x^{2n}\right| = \sup_{x\in[0,1[}\left|\frac{x^{2N+2}}{1-x^2}\right| \geq \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2N+2}}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} \to +\infty$$

Ce qui montre qu'il n'y a pas convergence uniforme de la série de fonction de terme général x^{2n}.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. On va appliquer les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)} \to 0$$

Donc la série (numérique) de terme général $\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général $f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}$ converge simplement.

2.

$$\left|\frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}\right| < \frac{e^{-na}|\sin(nx)|}{\ln(n+1)} \leq \frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$$

On applique les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

$$n^2\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)} \to 0$$

Donc la série numérique de terme général $\frac{e^{-na}}{\ln(n+1)}$ converge, par conséquent la série fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,+\infty[$, ce qui entraine que la série fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Sur $[0,1[$, $x^n \to 0$ donc $f_n(x) \to 0$

   Si $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$

   Si $x \in]1,+\infty[$, $x^n \to +\infty$ donc $f_n(x) \to 1$

   Revenons à la série de fonctions de terme général f_n :

   - Sur $[0,+\infty[$, il y a des valeurs pour lesquelles $f_n(x)$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,+\infty[$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.
   - Sur $[0,1]$, il y a un problème en $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0 donc la série ne converge pas simplement sur $[0,1]$,, donc elle ne converge pas normalement sur $[0,1]$.
   - Sur $[0,a]$, pour tout $x \in [0,a]$ $f_n(x) \to 0$ mais cela ne suffit pas à assurer la converge simple de la série de fonctions de terme général f_n (avec $f_n(x) > 0$)
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$
   x^n est le terme général d'une série géométrique de raison dans $]-1,1[$ donc convergente, ce qui entraine que la série numérique de terme général converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0,a]$.
   $$\forall x \in [0,a], \left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \leq \frac{a^n}{1+0} = a^n$$
   a^n est le terme général d'une série géométrique convergente car $a \in]0,1[$ donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement.

2. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.

   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^3} \sim \frac{x^2}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$

   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{2x(n^3+x^3) - x^2 \times 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{2nx^3 - x^4}{(n^3+x^3)^2} = \frac{x^3(2n-x)}{(n^3+x^3)^2}$$
   Manifestement les fonctions f_n admettent un maximum en $x = 2n$ (il faut faire un tableau de variation)
   $$f_n(2n) = \frac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3} = \frac{4n^2}{9n^3} = \frac{4}{9n}$$
   On a donc
   $$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(2n) = \frac{4}{9n}$$
   Il s'agit d'une série de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$)

   Donc la série ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

   Sur $[0,a]$ le maximum est en $f_n(a)$ (au moins pour n assez grand)
   $$f_n(a) = \frac{a^2}{n^3+a^3} \sim \frac{a^2}{n^3}$$
   ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, par conséquent elle converge normalement sur $[0,a]$.

3. Si $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0$, la série nulle converge.

   Si $x > 0$, $f_n(x) = \frac{x}{n^3+x^3} \sim \frac{x}{n^3}$, ce qui est le terme général d'une série numérique de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$

   Donc la série de fonction f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.
   $$f_n'(x) = \frac{n^3+x^3 - x \times 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{n^3-2x^3}{(n^3+x^3)^2}$$
   Il est à peu près clair que les fonctions f_n atteignent leur maximum là où la dérivée s'annule, c'est-à-dire pour

$$x^3=\frac{n^3}{2}\Leftrightarrow x=2^{-\frac{1}{3}}n$$

$$f_n\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)=\frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{n^3+\left(2^{-\frac{1}{3}}n\right)^3}=\frac{2^{-\frac{1}{3}}n}{\frac{3}{2}n^3}=\frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

$$\sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)|=\frac{2^{-\frac{4}{3}}}{3n^2}$$

Il s'agit d'une série de Riemann convergente avec $\alpha=2>1$, donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1. Si $x\neq 0$

$$|f_n(x)|\sim\frac{x^2}{n}$$

c'est insuffisant pour la convergence de la série, mais il s'agit d'une série alternée.

On pose $g_n(x)=\frac{x^2}{x^4+n}\to 0$ lorsque $n\to+\infty$, pour un x fixé, cette suite est décroissante, d'après le TSSA, la suite numérique de terme général $\frac{x^2}{x^4+n}$ converge, au moins pour $x\neq 0$, mais pour $x=0$, tout est nul, il y a convergence aussi.

2. Il faut utiliser le théorème du TSSA sur la majoration du reste

$$R_n(x)\leq|f_n(x)|=g_{n+1}(x)=\frac{x^2}{x^4+n+1}$$

Il suffit de montrer que cette expression tend vers 0 indépendamment de x.

$$g'_{n+1}(x)=\frac{2x(x^4+n+1)-x^2\times 4x^3}{(x^4+n+1)^2}=\frac{2x(-2x^4+n+1)}{(x^4+n+1)^2}$$

Les fonctions g_n sont positives, donc elles atteignent leur max quand la dérivée s'annule.

$$g'_n(x)=0\Leftrightarrow x^4=\frac{n+1}{2}\Leftrightarrow x=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$g_{n+1}\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^2}{\frac{n+1}{2}+n+1}=\frac{\sqrt{\frac{n+1}{2}}}{\frac{3}{2}(n+1)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$$

Ce qui entraine que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}R_n(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$$

Cela montre la convergence uniforme de la série de fonctions f_n.

3. Examinons la convergence normale sur un intervalle $[a,+\infty[$ avec $a>0$

Etudions la suite de fonctions

$$|f_n(x)|=g_n(x)=\frac{x^2}{x^4+n}$$

L'étude de cette fonction a déjà été faite au 2. en remplaçant $n+1$ par n

Sur $[a,b]$, le maximun est

soit

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Soit

$$\frac{a^2}{a^4+n} \sim \frac{a^2}{n}$$

Soit

$$\frac{b^2}{b^4+n} \sim \frac{b^2}{n}$$

Qui sont les termes généraux de séries divergentes avec $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $\alpha = 1 \leq 1$, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n n'est pas absolument convergente, sur un intervalle $[a, b]$.
Pour les intervalles du même type dans $\mathbb{R}^-$ cela ne change rien puisque les fonctions f_n sont paires.

4. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la convergente est uniforme sur $\mathbb{R}$ donc la somme est continue sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

Il s'agit d'une série alternée mais le « $(n+1)^3$ » au dénominateur va permettre de montrer la convergence normal sur $\mathbb{R}$

$$|u(x)| = \frac{e^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$$

$\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément sur $\mathbb{R}$, comme les fonctions u_n sont continues la fonction somme est continue.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1.

$$\forall x \in [-a, a], \left|\frac{x}{(x^2+n^2)^2}\right| \leq \frac{a}{(x^2+n^2)^2} \leq \frac{a}{n^4}$$

$\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$ donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[-a, a]$, donc uniformément sur $[-a, a]$.

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$ sont continues, la série converge uniformément donc la somme est continue.
3. On appelle f_n les fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$$

$$f_n'(x) = -2 \times \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Les fonctions f_n sont dérivables
La série de fonctions f_n' converge uniformément sur tout intervalle $[-a, a]$ (voir 1.)
La série numérique $f_n(0) = \frac{1}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)
Donc la série est dérivable en tout point de $[-a, a]$ (donc sur $\mathbb{R}$) et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}\right)' = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+n^2)^2}$$

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

On pose $f_n(x) = e^{-n}\sin(n^2 x)$, ces fonctions sont dérivable et $f_n'(x) = n^2 e^{-n}\cos(n^2 x)$
La série numérique de terme général $f_n(0) = 0$ converge et enfin

$$|f_n'(x)| \leq n^2 e^{-n}$$

$$n^2(n^2 e^{-n}) = n^4 e^{-n} \to 0$$

La suite numérique de terme général n^2e^{-n} converge grâce aux règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

Cela montre que la série de fonctions f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Les trois conditions qui entrainent que la série de fonction de terme général f_n est dérivable sont réunies.

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$
Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$

2. Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonctions continue.

3. La convergence étant uniforme sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a
$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n\geq 1} f_n(x)\, dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx$$
On calcule
$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^\pi \sin(nx)\, dx = \frac{1}{n^3}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^4}(-\cos(n\pi) + 1) = \frac{1}{n^4}(1 - (-1)^n)$$
Selon que n est pair ou impair $1 - (-1)^n$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux
$$\sum_{n\geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{2p}}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^4} = 0 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^4}$$
Puis on pose $n = p + 1$, $p = 0 \Rightarrow n = 1$
$$\sum_{n\geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$$
C'est bien l'égalité demandé.

4. Les fonctions f_n sont dérivables, $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$
La série de fonction de terme général f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$
Remarque : il n'était pas nécessaire de montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général f_n' sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle $[a, b]$ cela suffit.

5. D'après la question précédente
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = f'(x)$$
Donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)dx = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}$$

Pour les valeurs paires $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc on va distinguer les valeurs paires de valeurs impaires

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^3}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right)}{(2p)^3}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin(p\pi)}{(2p)^3}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin\left(p\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}$$

$$=0+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{(2p+1)^3}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$$

Puis on pose $n=p$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. On pose $g_n(x)=|f_n(x)|=\frac{1}{(n+1)(x+1)}$

   La série de fonctions de terme général f_n est une série alternée, on va appliquer le TSSA

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)(x+1)}=0$$

   La suite $\left(\frac{1}{(n+1)(x+1)}\right)_n$ est décroissante, d'après le TSSA la série de fonctions f_n' converge simplement.

2. D'après le TSSA le reste de la série vérifie

$$\forall x\in[0,1],\qquad |R_n(x)|\le g_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+2)(x+1)}\le\frac{1}{(n+2)(1+1)}=\frac{1}{2(n+2)}$$

   Ce reste est majoré indépendamment de x et tend vers 0, cela montre que la série de fonctions f_n converge uniformément.

3.

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=\sup_{x\in[0,1]}\frac{1}{(n+1)(x+1)}=\frac{1}{2(n+1)}\sim\frac{1}{2n}$$

   La valeur maximum est atteint pour $x=1$

   $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série Riemann divergente avec $\alpha=1\le 1$ donc la série ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement,

   Si $x<0$ alors $\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\to+\infty$ lorsque $k\to+\infty$ il n'y a pas convergence.

   Si $x=0$ alors $\left|(-1)^k\frac{k}{k^2+1}\right|\sim\frac{1}{k}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha=1\le 1$, il n'y a pas de convergence absolue, mais la série est alternée

$$\left|(-1)^k\frac{k}{k^2+1}\right|=\frac{k}{k^2+1}\to 0$$

   Il faut voir si la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, on pose $a(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $a'(x)=\frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}<0$ pour $x>1$, cela montre que la suite $\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$ est décroissante, d'après le TSSA la série numérique de terme général $(-1)^k\frac{k}{k^2+1}$ est convergente

   Si $x\ge 0$ alors

$$\left|(-1)^k\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right|\le\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$

$$k^2 \times \frac{ke^{-kx}}{k^2+1} = \frac{k^3 e^{-kx}}{k^2+1} \to 0$$

Lorsque $k \to +\infty$, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ est absolument convergente pour $x > 0$, autrement dit la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Conclusion : la série de fonctions de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et $D = [0, +\infty[$.

On tenter une méthode qui va échouée

Montrons que la convergence est normal sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$

$$\left|(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{ke^{-ka}}{k^2+1}$$

Avec les règles de Riemann et $\alpha = 2 > 1$

$$k^2 \times \frac{ke^{-ka}}{k^2+1} = \frac{k^3 e^{-ka}}{k^2+1} \to 0$$

Lorsque $k \to +\infty$, donc la série numérique de terme général $\frac{ke^{-ka}}{k^2+1}$ est convergente ce qui montre que la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur $[a, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ étant continues, la somme f est continue sur $[a, +\infty[$, par conséquent la somme est continue sur $]0, +\infty[$. L'ennui c'est que l'on n'a pas la continuité en 0.

Autre méthode en utilisant le TSSA, la série est alternée, il faut montrer que la suite $\left(\frac{ke^{-kx}}{k^2+1}\right)$ est décroissante et qu'elle tend vers 0

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{ke^{-kx}}{k^2+1} = 0$$

Ensuite on pose

$$b(x) = \frac{x}{x^2+1} e^{-kx}$$

$$b'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' e^{-kx} - k \frac{x}{x^2+1} e^{-kx} = \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} - k \frac{x}{x^2+1}\right) e^{-kx}$$
$$= \frac{1 - x^2 - kx(x^2+1)}{(x^2+1)^2} e^{-kx} = \frac{-kx^3 - x^2 - kx + 1}{(x^2+1)^2} e^{-kx} < 0$$

Au moins dès que x est un peu grand, donc la série numérique de terme général $(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ converge et le reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{(k+1)e^{-(k+1)x}}{(k+1)^2+1} \leq \frac{(k+1)}{(k+1)^2+1} \to 0$$

On a majoré le reste par une expression indépendante de x et qui tend vers 0 donc la convergence de la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ est uniforme sur $[0, +\infty[$.

Les fonctions $x \mapsto (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$ donc la somme f est continue.

2. Il s'agit de trouver le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où la série converge simplement. On pose

$$g_k : x \mapsto (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

Si $x < 0$ alors $\frac{e^{-kx}}{k^2+1} \to +\infty$ lorsque $k \to +\infty$ il n'y a pas convergence.

Si $x \geq 0$ alors

$$\left|(-1)^k \frac{e^{-kx}}{k^2+1}\right| \leq \frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$$

$\frac{1}{k^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, cela montre, la convergence normale, donc uniforme et par conséquent la converge simple de la série de fonctions de terme général g_k.

$$D' = \mathbb{R}^+$$

$$g_k'(x) = -(-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

On a vu dans la première question 1. que la série de fonctions de terme général $x \to (-1)^k \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$ convergeait uniformément sur $[0,+\infty[$ donc la série de fonctions de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Résumons

Les fonctions g_k sont continues

La série de fonctions de terme général g_k converge simplement sur $[0,+\infty[$

La série de fonctions de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$

Donc la somme g est dérivable, il reste à montrer que la dérivée est continue

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)$$

Les fonctions g_k' sont continues, la série de fonction de terme général g_k' converge uniformément sur $[0,+\infty[$ donc la somme g' est continue, par conséquent g est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}$

   Il s'agit d'une série alternée, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ tend vers 0 en décroissant donc la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

   Si $x > 0$,

$$n^2|f_n(x)| = \frac{n^2 e^{-nx}}{n+1} \to 0$$

   La série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument donc elle converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement.

   Conclusion : la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$.

2. $x \geq a$

$$|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} \leq \frac{e^{-na}}{n+1} = \alpha_n$$

$$n^2 \frac{e^{-na}}{n+1} \to 0$$

   Avec les règles de Riemann avec $\alpha > 1$, cela montre que la série numérique de terme général α_n converge donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[a,+\infty[$.

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

   Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas normalement sur $[0,+\infty[$.

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x\in]0,+\infty[} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Cela ne change rien si on ouvre l'intervalle.

3. On va utiliser la majoration du reste du TSSA

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-nx}}{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| = \sup_{x\in[0,+\infty[} |R_N(x)| < \frac{1}{N+1} \to 0$$

La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

- On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin(nx)}$$

Pour $n \geq 2$

$$f_n(x) \leq \frac{1}{n^2 - 1} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions f_n sont continues donc f est continue.

- On pose

$$g_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Pour $n \geq 2$

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

Or $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$.Cela montre que la série de fonctions de terme général g_n converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$. D'autre part les fonctions g_n sont continues donc g est continue.

- On pose

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{nx+1}$$

Il s'agit d'une série alternée la suite $\left(\frac{1}{nx+1}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 car $x > 0$ donc la série de fonctions de terme général h_n converge simplement vers 0. Grâce aux TSSA nous allons montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a,b]$ avec $a > 0$. Le reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)x+1} \leq \frac{1}{(n+1)a+1}$$

Donc

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| h(x) - \sum_{n=0}^{N} h_n(x) \right| \leq \frac{1}{(n+1)a+1} \to 0$$

Lorsque $n \to +\infty$

Cela montre que la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$.

En un point $x > 0$, on choisit a et b tels que $a < x < b$, la série de fonction de terme général h_n converge uniformément sur $[a,b]$ et les fonctions h_n sont continues donc h est continue en x et ceci pour tout $x > 0$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. Il s'agit d'une série alternée, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant, d'après le TSSA, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général f_n converge simplement.
2. $f_n'(x) = -\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ donc
$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{(n+x)^2} < \frac{1}{n^2}$$
$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur $]0, +\infty[$, donc uniformément sur $]0, +\infty[$, comme les fonctions f_n sont dérivable, le théorème de dérivation des série entraine que la somme est dérivable et que
$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1. Pour $x \leq 0$, $e^{-n^\alpha x}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
Pour $x > 0$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^\alpha x} = 0$$
Entraine que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha x}$ converge, autrement dit la série de fonctions de terme général f_n converge simplement, donc l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Nous allons montrer la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
$$|f_n(x)| \leq e^{-n^\alpha a}$$
D'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-n^\alpha a} = 0$$
Entraine que la série numérique de terme général $e^{-n^\alpha a}$ converge, ce qui montre que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$, donc uniformément sur $[a, +\infty[$.
Pour un $x > 0$ on choisit a tel que $0 < a < x$, il y a donc convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ et les fonctions f_n sont continues en x donc la somme f est continue en x donc sur $]0, +\infty[$.
3. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et
$$\forall n \geq 1, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_0(x) = 1$$
Entraine que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

Convergence de l'intégrale
$$\frac{\sin(x)}{e^x - 1} \sim_0 \frac{x}{x} = 1$$
Donc l'intégrale est convergente en 0

$$x^2\left|\frac{\sin(x)}{e^x-1}\right| \to 0 \quad \text{si} \quad x\to+\infty$$

Donc, d'après les règles de Riemann avec $\alpha > 2$ l'intégrale est absolument convergente donc convergente.
Pour utiliser le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ on va se placer sur un intervalle $[\epsilon, X]$ et on pose

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X \frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$$

Autre part

$$\sum_{n=0}^N f_n(x)=\sum_{n=0}^N e^{-(n+1)x}\sin(x)=e^{-x}\sin(x)\sum_{n=0}^N e^{-nx}=e^{-x}\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{1-e^{-x}}$$

$$=\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{e^x(1-e^{-x})}=\sin(x)\frac{1-e^{(N+1)x}}{e^x-1}$$

Et

$$\forall x\in[\epsilon,X],\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^N f_n(x)=\frac{\sin(x)}{e^x-1}$$

Les fonctions f_n sont continues sur $[\epsilon, X]$, il suffit que la série de terme général f_n converge uniformément sur $[\epsilon, X]$.

$$|f_n(x)|=e^{-(n+1)x}|\sin(x)|<e^{-(n+1)\epsilon}$$

$e^{-(n+1)\epsilon}=\left(\frac{1}{e^\epsilon}\right)^{n+1}$ est le terme général d'une série géométrique convergente car $\frac{1}{e^\epsilon}\in\,]-1,1[$.
Cela montre que la série de terme général f_n converge normalement sur $[\epsilon, X]$ donc uniformément.

$$I(\epsilon,X)=\int_\epsilon^X\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\int_\epsilon^X\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\epsilon^X f_n(x)dx\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\epsilon^X e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx\right)$$

Il existe une primitive de f_n de la forme

$$F_n(x)=(A_n\cos(x)+B_n\sin(x))e^{-(n+1)x}$$

$$F_n'(x)=\big((-(n+1)A_n+B_n)\cos(x)+(-A_n-(n+1)B_n)\sin(x)\big)e^{-(n+1)x}$$

$$F_n'(x)=e^{-(n+1)x}\sin(x)\Leftrightarrow\begin{cases}-(n+1)A_n+B_n=0\\-A_n-(n+1)B_n=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_n=\dfrac{-1}{1+(n+1)^2}\\[2mm] B_n=\dfrac{-n-1}{1+(n+1)^2}\end{cases}$$

$$\int_\epsilon^X e^{-(n+1)x}\sin(x)\,dx=\left[\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(x)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(x)\right)e^{-(n+1)x}\right]_\epsilon^X$$

$$=\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$

$$-\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}\right)$$

$$I(\epsilon,X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right.$$
$$\left.-\left(\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}\right)\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$

Maintenant il faut faire tendre X vers l'infini dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$

Et ϵ vers 0 dans

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$

En faisant attention car il s'agit de somme infini
Pour la première limite, on se place sur $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

$$\left|\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right|\leq\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)a}$$

Avec les règles de Riemann

$$n^2\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\right)e^{-(n+1)a}\to 0$$

Donc la série de terme général $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc uniformément sur $[a,+\infty[$, les fonctions $\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$ tendent les 0 lorsque X tend vers l'infini, d'après le théorème de la double limite et

$$\lim_{X\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{-1}{1+(n+1)^2}\cos(X)+\frac{-n-1}{1+(n+1)^2}\sin(X)\right)e^{-(n+1)X}\right)=0$$

Pour la seconde cela se complique un peu, et on prend $\epsilon\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par exemple

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+(n+1)^2}\cos(\epsilon)+\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\right)e^{-(n+1)\epsilon}$$
$$=\cos(\epsilon)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}$$

Pour la première série

$$\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}<\frac{1}{1+(n+1)^2}\sim\frac{1}{n^2}$$

Cette série est normalement convergente sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc uniformément convergente, les fonctions « à l'intérieur » sont continue donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon\to0}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Par conséquent

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\cos(\epsilon)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{1+(n+1)^2}e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Pour la somme suivante, on va chercher un maximum des fonctions $g_n(x)=\sin(x)\,e^{-(n+1)x}$

$$g_n'(x)=\cos(x)\,e^{-(n+1)x}-(n+1)\sin(x)\,e^{-(n+1)x}=\cos(x)\,e^{-(n+1)x}(1-(n+1)\tan(x))$$

Cette dérivée est positive avant $x=\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ et négative après pour des petites valeurs de x, elles atteignent leur maximum en $x=\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$

Donc

$$0<\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\le\frac{n+1}{1+(n+1)^2}g_n\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$=\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)e^{-(n+1)\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

On pose $n'=n+1$ pour simplifier

$$0<\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\le\frac{n'}{1+n'^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-n'\arctan\left(\frac{1}{n'}\right)}$$

$$=\frac{n'}{1+n'^2}\sin\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-n'\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)}=\frac{n'}{1+n'^2}\left(\frac{1}{n'}+o\left(\frac{1}{n'}\right)\right)e^{-1+o(1)}\sim\frac{1}{n'^2}$$

La série de fonctions terme général $\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}$ converge normalement sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc uniformément sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, ces fonctions sont continues donc la somme est continue et

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{n+1}{1+(n+1)^2}\sin(\epsilon)\,e^{-(n+1)\epsilon}=\sum_{n=0}^{+\infty}0=0$$

Finalement

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \epsilon\to 0}}I(\epsilon,X)=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$ est convergente donc

$$\lim_{\substack{X\to+\infty\\ \epsilon\to 0}}I(\epsilon,X)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx$$

Donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{e^x-1}dx=\sum_{n'=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n'^2}$$

Allez à : Exercice 15