Limite, continuité, théorème des valeurs intermédiaires, dérivabilité, théorèmes de Rolle et des accroissements finis

I Limites Continuités

Exercice 1 :

Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

Déterminer les limites de f, si elle existent, en 0 et en $+\infty$.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Montrer que f admet une limite en 0 et déterminer cette limite.

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}\ ; \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}{x^2}\ ;$$

$$c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}\ ; \qquad d)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(\ln(x))}{x}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Calculer, si elles existent les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Calculer si elles existent

1.
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}$$

2.
$$\lim_{x\to 0} x^{-\frac{7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par :

$$f_n(x)=\ln(1+x^n)+x-1$$

1. Montrer qu'il existe $c_n\in[0,1]$ tel que $f_n(c_n)=0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f_n(x)=x^n-x-1$, avec $n\geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n>1$ tel que $f_n(x_n)=0$
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n)>0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et quelle converge vers une limite l.
4. Déterminer l.

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit f_n une fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x)=1-\frac{x}{2}-x^n$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n\in[0,1]$ telle que $f_n(x_n)=0$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n)>0$,
3. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et qu'elle converge vers une limite l.
4. Supposons qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $0\leq x_n\leq M<1$
   a. Calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers l'infini.
   b. Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Soient a et b des nombres réels tels que $a<b$ et f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$
   a) On suppose que pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ on a :
   $$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$$
   Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
   En déduire qu'il existe $x\in[a,b]$, tel que $f(x)=x$.
   b) On suppose maintenant que pour tout $(x,y)\in[a,b]\times[a,b]$ $x\neq y$ on a :
   $$|f(x)-f(y)|<|x-y|$$
   Montrer qu'il existe un unique $x\in[a,b]$, tel que $f(x)=x$
2. On désigne par f l'application de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $x\in[0,2]$ par :
   $$f(x)=\ln(2+x^2)$$
   a) On pose

$$M=\max_{x\in[0,2]}|f'(x)|$$

Montrer que $M<1$.

b) En déduire, en montrant que $f([0,2])\subset[0,2]$, qu'il existe un unique $x\in[0,2]$ tel que $f(x)=x$. On notera $\tilde{x}$ cet élément.

c) Montrer que l'application f est injective.

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels par la donnée de :

$$x_0\in[0,2]\quad\text{et}\quad x_{n+1}=f(x_n)\quad\text{si } n\geq 0$$

d) Montrer que si $x_0\neq\tilde{x}$, alors pour tout $n\geq 0$, $x_n\neq\tilde{x}$.

e) On suppose que $x_0\neq\tilde{x}$. Montrer que pour tout $n\geq 0$

$$\frac{|x_{n+1}-\tilde{x}|}{|x_n-\tilde{x}|}\leq M$$

f) En déduire que pour tout $x_0\in[0,2]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{x}$.

On donne $0{,}69<\ln(2)<0{,}7$ et $1{,}79<\ln(6)<1{,}8$.

Allez à : Correction exercice 11 :

II Continuité dérivabilité

Exercice 12 :

Les fonctions f,g et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=x|x|;\qquad g(x)=x^{\frac{3}{5}};\qquad h(x)=\cos\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ x+\dfrac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{si } x=1\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe $c\in]0,1[$ telle que $f'(c)=0$. (on ne demande pas la valeur de c).

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée lorsqu'elle existe :

1. $x\mapsto f(x)=\ln(\ln(x))$ si $x>1$
2. $x\mapsto g(x)=\ln\left(e^{x^2}+1\right)$ si $x\in\mathbb{R}$
3. $x\mapsto h(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ x\ln(x)-x & \text{si } x>0\end{cases}$

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

Soient a et b deux réels

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ e^{bx}-x & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. A l'aide de la règle de L'Hospital déterminer la limite suivante
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\,x-\sin(x)}{x^2}$$
2. Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par
$$x\to\begin{cases}ax+b & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie par
$$f(x)=\frac{e^x}{x^e}$$

1. Etudier les variations de f.
2. Comparer les réels e^π et π^e.

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

On considère l'application $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, définie par :
$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right), & \text{si } x\neq 0\\ f(x)=0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer $f'(x)$ sur $]-1,1[$.
3. Montrer que l'application dérivée $f':]-1,1[\to\mathbb{R}$ est continue sur $]-1,1[$.
   Quel est l'ensemble des $x\in]-1,1[$ pour lesquels $f'(x)=0$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.
5. On désigne par $\hat{f}$ la bijection de $[-1,1]$ sur $f([-1,1])$ définie par $\hat{f}(x)=f(x)$, pour tout $x\in[-1,1]$ et on désigne par $\hat{f}^{-1}$ sa bijection réciproque.
   Justifier l'existence et déterminer $\left(\hat{f}^{-1}\right)'(0)$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$f(x)=\begin{cases}e^x & \text{si } x<0\\ ax^2+bx+c & \text{si } x\ge 0\end{cases}$$
Déterminer a,b et c dans $\mathbb{R}$ tels que f soit C^2 (c'est-à-dire deux fois dérivables et que la dérivée seconde soit continue). Est-ce que dans ce cas f est C^3 ?

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ x^2+1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable ?
3. Calculer la dérivée de f aux points x où elle est dérivable ?

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x} & \text{si } 0\le x<\dfrac{1}{2}\\ 2x+\lambda x^2 & \text{si } \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

1. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit continue.
2. Déterminer, s'ils existent, les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit dérivable.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \neq 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$$

Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, |f(x)-f(y)|\le|\sin(x)-\sin(y)|$$

1. Montrer que la fonction f est 2π-périodique.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ et calculer $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

Calculer les dérivées des fonctions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ et $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x)=\ln(e^x);\quad g(x)=\ln(\sin^2(x));\quad h(x)=x+\sqrt{1+x^2}$$

Montrer aussi que

$$h'(x)=\frac{h(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Les fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

$$f(x)=|x|\sin(x)\quad \text{et}\quad g(x)=\ln(1+|x|)$$

Sont-elles dérivable en 0 ?

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

Calculer, lorsqu'elles existent, les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f_1: x\mapsto \ln(3+\sin(x))$
2. $f_2: x\mapsto \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$
3. $f_3: x\mapsto \ln\left(\frac{2+\cos(x)}{2-\cos(x)}\right)$
4. $f_4: x\mapsto x^{x+1}$
5. $f_5: x\mapsto \sin((e^x)^2)$
6. $f_6: x\mapsto x^{\frac{\sin(x)}{x}}$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Les fonctions f,g et $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};$$

$$h(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases};\quad i(x)=\begin{cases}x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Les fonctions f,g,h,i sont-elles continues en 0, dérivables en 0, de classe C^1 en 0.

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(1)=0$.

Soit $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie pour tout $n>0$ par $f_n(x)=x^n g(x)$

1. Montrer que pour tout $n>0$, il existe $\alpha_n\in]0.1[$ telle que :

$$\sup_{x\in]0.1[}|f_n(x)|=f_n(\alpha_n)\quad \text{et}\quad f_n'(\alpha_n)=0$$

2. Calculer $f_n(\alpha_n)$ en fonction de α_n, $g'(\alpha_n)$ et n. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in]0.1[}|f_n(x)|$$

Allez à : Correction exercice 28 :

III Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis.

Exercice 29 :

Soit f la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x\leq 1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1<x\end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c \in]02[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$
Déterminer les valeurs possible de c.
Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

1. Montrer que pour tout x, y réels on a :
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$
2. Montrer que pour tout $x > 0$
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Soit f une application de l'intervalle $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, que $f(0) = 0$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a $f'(x) \neq 0$.
Montrer que f conserve un signe constant sur $]0,1[$.
Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continument dérivable sur $[0,1]$ (ce qui signifie que f est continue et dérivable sur $[0,1]$ et que f' est continue sur $[0,1]$).
On suppose de plus que $f(0) = 0$, et que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait $f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait :
$$f(x) \geq mx$$
Allez à : Correction exercice 32 :
Exercice 33 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ telle que :
$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$
Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

Soit $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$
1. Montrer qu'il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$. On pourra appliquer le théorème de Rolle en rappelant les hypothèses.
2. Calculer $f_n(\alpha_n)$ en fonction de α_n, de n et de $\cos(\pi\alpha_n)$.
3. En déduire la limite de $f_n(\alpha_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et pour tout $x \in]a, b[$, $f''(x) \leq 0$. Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.
Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, avec $f(a)=f(b)=0$, telle que f soit dérivable sur $]a,b[$ et telle que sa dérivée soit strictement décroissante, c'est-à-dire que la fonction f' est strictement décroissante.

1. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
2. Montrer si $t\in]a,c[$ alors $f'(t)>0$ et que si $t\in]c,b[$ alors $f'(t)<0$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$. On pourra utiliser le théorème des accroissements finis (on fera attention au fait que f n'est pas dérivable en a et en b.
4. Montrer que f admet un maximum global en $x=c$.
5. Montrer que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$.

Allez à : Correction exercice 36 :

Exercice 37 :

Soient a et b des réels tels que $0<a<b$.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que
$$\frac{b-a}{b}<\ln(b)-\ln(a)<\frac{b-a}{a}$$
2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que :
$$f(0)=0; f(1)=0; f'(0)>0 \quad \text{et} \quad f'(1)<0$$
De plus on supposera que $\forall x\in]0,1[, f''(x)<0$.
2.1. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)>0$.
2.2. Montrer que $f(\alpha)>0$.
2.3. On suppose qu'il existe $\beta\in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, montrer qu'il existe $c_1\in]0,\beta[$ et $c_2\in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=f'(c_2)=0$, en déduire une contradiction.
2.4. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x\in]0,1[$.
3. On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=\ln(xa+(1-x)b)-x\ln(a)-(1-x)\ln(b)$$
Montrer que f vérifie les hypothèses du 2 (En particulier on vérifiera que f est bien définie $[0,1]$. Puis que pour tout $x\in]0,1[$
$$\ln(xa+(1-x)b)>x\ln(a)+(1-x)\ln(b)$$

Allez à : Correction exercice 37 :

Exercice 38 :

Soient a et b des réels tels que $a<b$.

1. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que
$$(b-a)e^a<e^b-e^a<(b-a)e^b$$
2. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que :
$$f(0)=0; f(1)=0; f'(0)<0 \quad \text{et} \quad f'(1)>0$$
De plus on supposera que $\forall x\in]0,1[, f''(x)>0$.
2.1. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)<0$.
2.2. Montrer que $f(\alpha)<0$.
2.3. On suppose qu'il existe $\beta\in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, montrer qu'il existe $c_1\in]0,\beta[$ et $c_2\in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=f'(c_2)=0$, en déduire une contradiction.
2.4. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x\in]0,1[$.
3. On considère la fonction f définie par :
$$f(x)=e^{xa+(1-x)b}-xe^a-(1-x)e^b$$
Montrer que f vérifie les hypothèses du 2 (En particulier on vérifiera que f est bien définie $[0,1]$. Puis que pour tout $x\in]0,1[$
$$e^{xa+(1-x)b}<xe^{\mathrm{a}}+(1-x)e^b$$

Allez à : Correction exercice 38 :

Exercice 39 :

Soit p un entier, $p \geq 2$.

1. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel c dans l'intervalle $]0,1[$ tel que :
$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$
2. En déduire l'inégalité :
$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) < \frac{1}{p\ln(p)}$$
3. Démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = +\infty$$

Allez à : Correction exercice 39 :

Exercice 40 :

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$, montrer que :
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose :
$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Allez à : Correction exercice 40 :

Exercice 41 :

Soit $P(X)$ un polynôme à coefficient réel de degré $n \geq 1$.

Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions réelles.

Allez à : Correction exercice 41 :

Exercice 42 :

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

On suppose f dérivable en 0 et en 1et que $f'(0) = f'(1) = 0$

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$$
On pourra utiliser la fonction $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{f(x)-1}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$
En déduire que $f(\alpha) = \alpha$

Allez à : Correction exercice 42 :

Exercice 43 :

Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On pose
$$\varphi(x) = \big(f(b) - f(a)\big)x^3 - (b^3 - a^3)f(x)$$
1. Montrer que φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, calculer $\varphi'(x)$.

2. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :
$$3c^2\big(f(b) - f(a)\big) = (b^3 - a^3)f'(c)$$

Allez à : Correction exercice 43 :

Exercice 44 :

Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, on suppose que f est dérivable sur $]a, b[$, et que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Allez à : Correction exercice 44 :

Exercice 45 :

Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable dans $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$. On désigne par $g:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$
2. Montrer que si f' est croissante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g.

Allez à : Correction exercice 45 :

Exercice 46 :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) < f(b)$.On suppose de plus que f est dérivable en a et en b et que $f'(a) = f'(b) = 0$.

1. On pose
$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
   i. Montrer que
$$g(x) = f(x) - f(b) - (x - b)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
   ii. Montrer que g est dérivable en a et en b. Calculer $g'(a)$ et $g'(b)$.
   iii. En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in]a, a + \eta], g(x) < 0$ et qu'il existe $\eta' > 0$ tel que $\forall x \in [b - \eta', b[, g(x) > 0$
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$.
3. Montrer que
$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Allez à : Correction exercice 46 :

Exercice 47 :

On considère une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en tout réel a.

1. Que déclare le théorème des accroissements finis à propos de :
$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$
2. Montrer que :
$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = l \Rightarrow l = f'(a)$$
$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = l \Rightarrow l = f'(a)$$
3. Soit g une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soient

$$E=\{g(x),x<a\}\quad \text{et}\quad F=\{g(y),y>a\}$$

Montrer que E admet une borne supérieure notée m et que F admet une borne inférieure notée M. Puis montrer que

$$m\leq g(a)\leq M$$

4. Montrer que

$$\lim_{x\to a^-} g(x)=m\quad \text{et}\quad \lim_{y\to a^+} g(y)=M$$

5. Montrer que si la dérivée f' de f est croissante alors cette dérivée est continue.

Allez à : Correction exercice 47 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

En 0 le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit donc d'une forme indéterminée.

Première méthode

On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{1+x^2-(1+x)}$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x}=\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x(x-1)}=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}=-2$$

Deuxième méthode

On va utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$g(x)=x\quad \text{et}\quad h(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}$$

$$g'(x)=1\quad \text{et}\quad h'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{g(x)}{h(x)}=-2$$

En $+\infty$ le numérateur tend vers l'infini et le dénominateur est de la forme $+\infty-\infty$, il est donc lui-même une forme indéterminée. On peut penser à multiplié par l'expression conjuguée mais en regardant cette expression on voit que l'on retombe sur une forme indéterminée, on peut aussi penser à la règle de L'Hospital mais $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est encore une forme indéterminée (que l'on pourrait arranger assez facilement) nous allons donc voir une autre technique.

En $+\infty$ $x>0$ donc $|x|=x$

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}=\frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{x}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

Pour commencer on peut regarder comment se comporte $f(x)$ pour des petites valeurs de x, prenons par exemple $x=\frac{1}{p}$ avec $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(x)=\frac{1}{p}E\left(\frac{1}{p}-p\right)=\frac{1}{p}\times(-p)=-1\to -1$$

Lorsque $p\to+\infty$

Si par exemple $x=-\frac{1}{p}$ avec $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(x)=-\frac{1}{p}E\left(-\frac{1}{p}+p\right)=-\frac{1}{p}(p-1)=-1+\frac{1}{p}\to -1$$

Il semble bien que f admette une limite et que cette limite soit -1. Mais pour l'instant nous n'avons rien démontré.

Pour tout $x>0$ réel il existe un unique $n\in\mathbb{N}$ tel que

$$n\le\frac{1}{x}<n+1$$

En fait $n=E\left(\frac{1}{x}\right)$

On en déduit que

$$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\quad\text{et}\quad -n-1<-\frac{1}{x}\le -n$$

On additionne ces deux inégalités

$$-n-1+\frac{1}{n+1}<x-\frac{1}{x}\le -n+\frac{1}{n}$$

Ce qui équivaut à

$$-n-\frac{n}{n+1}<x-\frac{1}{x}\le -n+\frac{1}{n}$$

On en déduit que $E\left(x-\frac{1}{x}\right)$ vaut $-n-1$ ou $-n$, ce que l'on résume par

$$-n-1\le E\left(x-\frac{1}{x}\right)\le -n\quad(1)$$

On reprend les inégalités

$$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\quad(2)$$

Le but est de « multiplier » les inégalités (1) et les inégalités (2), si tous les termes étaient positifs, il n'y aurait pas de problèmes mais dans les inégalités (1) les termes sont négatifs alors on va tout multiplier par -1

$$n\le -E\left(x-\frac{1}{x}\right)\le n+1\quad(1)'$$

On multiplie alors les inégalités (2) par les inégalités $(1)'$

$$\frac{n}{n+1}\le -xE\left(x-\frac{1}{x}\right)\le\frac{n+1}{n}\quad(3)$$

D'après

$$n\le\frac{1}{x}<n+1$$

$$x\to 0\Leftrightarrow n\to+\infty$$

On fait tendre n vers $+\infty$ dans (3) et on obtient

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-xE\left(x-\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x)=-1$$

Pour la limite en 0^- on peut faire un raisonnement semblable ou remarquer que si y n'est pas un entier (ce qui est le cas puisque le but est de faire tendre $y=-x$ vers 0)

$$E(-y)=-E(y)-1$$

Donc pour $x<0$

$$f(x)=xE\left(x-\frac{1}{x}\right)=x\left(-E\left(-x+\frac{1}{x}\right)-1\right)=(-x)E\left((-x)-\left(\frac{1}{-x}\right)\right)-x=f(-x)-x$$

$-x>0$, on peut appliquer le résultat ci-dessus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(-x)=-1$$

Comme la limite de $-x$ est aussi nulle

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-1$$

Finalement

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=-1$$

Ce qui montre à la fois que f admet une limite lorsque $x\to 0$ (avec $x\neq 0$) et que cette limite est -1.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

a) Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1+x-(1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}$$

Allez à : Exercice 3 :

b) Il s'agit d'une forme indéterminée. On va multiplier par l'expression conjuguée.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1+x^2-(1+x)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{1+x^2-(1+x)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x^2-x}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x(x-1)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{x-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$$

C'est la limite des termes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}=0$$

Car le dénominateur tend vers l'infini, finalement

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\times\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}=1\times 0=0$$

Autre méthode

En $+\infty$, $x>0$ donc $|x|=x$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}{x^2}=\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{x^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}{x}$$

Le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers l'infini, donc la limite du quotient tend vers 0.

Allez à : Exercice 3 :

c) Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il s'agit d'une forme inderterminée, nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln(1+x^2)\quad \text{et}\quad g(x)=\sin^2(x)$$

Alors

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}\quad \text{et}\quad g'(x)=2\sin(x)\cos(x)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2\sin(x)\cos(x)}=\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}$$

On a « séparé » la partie indéterminée $\frac{x}{\sin(x)}$ de la partie où il n'y a pas de problème $\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}$

Comme on sait que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{\sin(x)}=1$$

D'autre part

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}=1$$

Finalement

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\left(\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{\sin(x)}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)\cos(x)}=1\times 1=1$$

Allez à : Exercice 3 :

d) Posons $t=x-1\Leftrightarrow x=1+t$

$$\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(1+t)}{t}$$

Première méthode

On sait d'après le programme de terminale que

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$$

Deuxième méthode

On utilise la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln(x)\quad \text{et}\quad g(x)=x-1$$

Alors

$$f'(x)=\frac{1}{x}\quad \text{et}\quad g'(x)=1$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

Troisième méthode

$$\frac{\ln(x)}{x-1}=\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$$

La limite de ce quotient en 1 est la limite du taux de variation de la fonction ln en 1, ln étant dérivable, cette limite vaut $\ln'(1)$ c'est-à-dire $\left(\frac{1}{x}\right)_{x=1}=1$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

Par définition de la partie entière, $E(\ln(x))$ est l'unique entier tel que :

$$E(\ln(x))\le\ln(x)<E(\ln(x))+1$$

Pour x assez grand ($x>e$, ce qui équivaut à $\ln(x)>1$ et donc $E(\ln(x))>0$) on a

$$0<E(\ln(x))\le\ln(x)$$

En divisant cette inégalité par $x>0$

$$0<\frac{E(\ln(x))}{x}\le\frac{\ln(x)}{x}$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

On a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(x))}{x}=0$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

$$E(\ln(\sqrt{x})\le\ln(\sqrt{x})<E(\ln(\sqrt{x})+1$$

Donc

$$\ln(\sqrt{x})-1<E(\ln(\sqrt{x})\le\ln(\sqrt{x})$$

On divise par $\sqrt{x}>0$

$$\frac{\ln(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}<\frac{E(\ln(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}\le\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

On pose $t=\sqrt{x}\to+\infty$ lorsque $x\to+\infty$

$\frac{\ln(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(t)}{t}-\frac{1}{t}\to 0$ lorsque $t\to+\infty$

Et $\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=\frac{\ln(t)}{t}\to 0$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}=0$$

La limite de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ en 0 est une forme indéterminée car $\ln(1+x)-x\to 0$ et $x^2\to 0$ lorsque $x\to 0$.

Nous allons utiliser la règle de L'Hospital, on pose

$$f(x)=\ln(1+x)-x\quad\text{et}\quad g(x)=x^2$$

Alors

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\qquad\text{et}\quad g'(x)=2x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\frac{\frac{x}{1+x}}{2x}=-\frac{1}{1+x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{1+x}=-1$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

Notons déjà que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ il reste à étudier la continuité en 0.

D'autre part $\sqrt{x^2}=|x|$, nous allons donc distinguer deux cas $x<0$ et $x>0$.

Si $x<0$ alors $f(x)=x+\frac{-x}{x}=x-1$ donc

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

Si $x>0$ alors $f(x)=x+\frac{x}{x}=x+1$ donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée. Nous allons transformer le numérateur :

$$\ln(1+e^{2x})=\ln\left(e^{2x}(e^{-2x}+1)\right)=\ln(e^{2x})+\ln(e^{-2x}+1)=2x+\ln(1+e^{-2x})$$

Donc

$$\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}=\frac{2x+\ln(1+e^{-2x})}{x}=2+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$$

$\ln(1+e^{-2x})\to 0$ lorsque x tend vers $+\infty$, par conséquent $\frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}\to 0$ lorsque $x\to+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{x}=2$$

2. $x^{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{x}^7}$ n'est définie que pour des $x>0$. $x^{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$

$-\frac{1}{x^2}\to-\infty$ lorsque $x\to 0$ donc $e^{-\frac{1}{x^2}}\to 0$ lorsque $x\to 0$.

Il s'agit d'une forme indéterminée. Il est à peu près clair que la règle de L'Hospital ne donne rien, on va faire un changement de variable $X=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=X^{-\frac{1}{2}}$, ainsi $X\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$.

$$x^{-\frac{7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\left(X^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{7}{4}}e^{-X}=X^{\frac{7}{8}}e^{-X}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée dont le résultat est connu (l'exponentielle l'emporte) et vaut 0.

$$\operatorname{Lim}_{x\to 0^+} x^{-\frac{7}{2}}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{X\to+\infty} X^{\frac{7}{8}}e^{-X}=0$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. Si l'énoncé avait demandé « montrer qu'il existe un unique $c_n\in[0,1]$ tel que $f_n(c_n)=0$ on aurait étudier la fonction f_n sur $[0,1]$ en espérant pouvoir montrer que cette fonction est une bijection et que $f_n(0)$ et $f_n(1)$ soient de signe distincts, mais ce n'est pas le cas. L'autre théorème qui permet ce genre de résultat (sans l'unicité) est le théorème des valeurs intermédiaires.

f_n est une fonction continue sur $[0,1]$, $f_n(0)=-1<0$ et $f_n(1)=\ln(2)>0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_n\in[0,1]$ tel que $f_n(c_n)=0$.

2. Alors là, il faut calculer la dérivée de f_n (car, évidemment f_n est dérivable)

$$f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}}{1+x^n}+1=\frac{nx^{n-1}+1+x^n}{1+x^n}>0$$

Pour tout $x\in[0,+\infty[$, par conséquent f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0),f_n(1)]=[-1,\ln(2)]$, comme $0\in[-1,\ln(2)]$, f_n admet un unique antécédent du réel 0, bref il existe un unique $c_n\in[0,1]$ tel que $f_n(c_n)=0$.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

1. $f_n'(x)=nx^{n-1}-1>0$

x	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	$+$	
$f_n(x)$	-1 $\nearrow$	$+\infty$

f_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$, comme $0\in]-1,+\infty[$, il existe un unique $x_n\in$ $]1,+\infty[$ tel que $f_n(x_n)=0$.

2. On a $x_n^n-x_n-1=0$ donc $x_n+1=x_n^n$

$$f_{n+1}(x_n)=x_{n+1}^n-x_n-1=x_{n+1}^n-x_n^n=x_n^n(x_n-1)>0$$

Car $x_n>1$.

3. f_{n+1} est une bijection croissante donc f_{n+1}^{-1} est aussi une bijection croissante

$$f_{n+1}(x_n)>0\Rightarrow f_{n+1}(x_n)>f_{n+1}(x_{n+1})\Rightarrow f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(x_n)\big)>f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(x_{n+1})\big)\Rightarrow x_n>x_{n+1}$$

La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers une limite $l\geq 1$

4. Si $l>1$ alors

$$x_n>l\Rightarrow x_n^n>l^n$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}x_n^n=+\infty$$

Ce qui est impossible car pour tout n on a

$$x_n^n=x_n+1$$

Le terme de gauche tend vers $+\infty$ et celui de droite vers $l+1$, il y a une contradiction. Donc $l=1$.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. $f_n'(x)=-\frac{1}{2}-nx^{n-1}<0$, $f_n(0)=1$ et $f_n(1)=1-\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

x	0	1
$f_n'(x)$	$-$	
$f_n(x)$	1 $\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Donc f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, comme $0\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$, il existe un unique $x_n\in[0,1]$ tel que $f_n(x_n)=0$.

2.

$$f_{n+1}(x_n)=1-\frac{x_n}{2}-x_n^{n+1}$$

Or

$$f_n(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^n = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x_n}{2} = x_n^n$$

Donc

$$f_{n+1}(x_n) = 1 - \frac{x_n}{2} - x_n^{n+1} = x_n^n - x_n^{n+1} = x_n^n(1 - x_n) \geq 0$$

Car $x_n > 0$ et $1 - x_n > 0$.

3. La question 2. Entraine que

$$f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

La bijection réciproque de f_{n+1} est décroissante donc

$$f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(x_n)\big) \leq f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(x_{n+1})\big)$$

Ce qui entraine que

$$x_n \leq x_{n+1}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, de plus elle est majorée par 1 donc elle converge vers une limite finie.

4.
   a. $0 \leq x_n \leq M$ entraine que $0 \leq x_n^n \leq M^n$ comme la limite de M^n est 0,
   $$\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$$
   b. Comme
   $$1 - \frac{x_n}{2} - x_n^n = 0$$

Cela entraine que

$$1 - \frac{l}{2} = 0 \Leftrightarrow l = 2$$

Ce qui est impossible car $l \in [0,1]$

Par conséquent $l = 1$.

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.
   a) Soit $x_0 \in [a, b]$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta = \epsilon > 0$ tel que
   $$\forall x \in [a, b], |x - x_0| \leq \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \leq \epsilon$$

Cela montre que f est continue en x_0, pour tout $x_0 \in [a, b]$, f est continue sur $[a, b]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$, g est une application continue

$$g(a) = f(a) - a \geq 0$$

Car$f(a) \in [a, b] \Leftrightarrow\ a \leq f(a) \leq b \Rightarrow 0 \leq f(a) - a$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Car $f(b) \in [a, b] \Leftrightarrow a \leq f(b) \leq b \Rightarrow f(b) - b \leq 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, ce qui équivaut à $f(c) = c$, il reste à changer le nom de c pour obtenir le résultat.

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

Première méthode :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \epsilon > 0, \forall x\ |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \epsilon$$

Donc f est continue en x_0 quelconque, donc sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|$$

Donc

$$0 \leq \lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Autrement que f est continue en x_0 quelconque, et donc sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 11 :

b) Comme

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

On peut appliquer le résultat du a). Il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$, il reste à montrer l'unicité de x. Supposons qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ et $x_2 \in [a, b]$, avec $x_1 \neq x_2$ tels que

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = x_2$$

Alors

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$$

Ce qui entraine que

$$|x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|$$

Or $|x_1 - x_2| \neq 0$ donc cette dernière est fausse, par conséquent il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Allez à : Exercice 11 :

2.

a) Etudions la fonction f' sur l'intervalle $[0,2]$

$$f'(x) = \frac{2x}{2 + x^2}$$

La dérivée de cette fonction est

$$f''(x) = \frac{2(2 + x^2) - 2x \times 2x}{(2 + x^2)^2} = 2\frac{2 + x^2 - 2x^2}{(2 + x^2)^2} = 2\frac{2 - x^2}{(2 + x^2)^2}$$

Tableau de variation de la fonction f' :

x	0		$\sqrt{2}$		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

On en déduit que

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Allez à : Exercice 11 :

b) D'après le tableau ci-dessus $\forall x \in [0,2], f'(x) \geq 0$ donc f est croissante (et même strictement croissante puisque la dérivée ne s'annule qu'en un point), donc $f([0,2]) = [f(0), f(2)] = [\ln(2), \ln(6)] \subset [0,2]$ d'après les données à la fin de l'exercice.

De plus, d'après la formule des accroissements finis, pour tout $x, y \in [0,2]$, il existe $c \in [x, y]$ si $x < y$ ou $c \in [y, x]$ si $y < x$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

Ce qui entraine que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq M|x - y| < |x - y|$$

On peut donc appliquer le résultat du 1. b), il existe donc un unique $\tilde{x} \in [0,2]$ tel que

$$f(\tilde{x}) = \tilde{x}$$

Remarque : on pouvait aussi montrer que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est une bijection.

Allez à : Exercice 11 :

c) D'après b), f est strictement croissante sur $[0,2]$ donc elle est injective.

Remarque : si vous n'êtes pas convaincu, il suffit d'utiliser la contraposée de l'injectivité

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

En effet, si $x_1 \neq x_2$ alors $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$, dans le premier cas $f(x_1) < f(x_2)$ car f est strictement croissante et dans le second cas $f(x_1) > f(x_2)$ car f est strictement croissante.

Allez à : Exercice 11 :

d) si $x_0 \neq \tilde{x}$ alors montrons, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $\tilde{x} \neq x_n$.

$$x_n \neq \tilde{x} \Rightarrow f(x_n) \neq f(\tilde{x}) \Rightarrow x_{n+1} \neq \tilde{x}$$

Car f est injective (on a utilisé la contraposée de l'injectivité), car $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ et $f(x_n) = x_{n+1}$, cela montre que pour tout $n \geq 0$.

$$x_n \neq \tilde{x}$$

Allez à : Exercice 11 :

e) D'après l'inégalité du b)

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

On applique cette formule à $x = x_n$ et $y = \tilde{x}$

$$|f(x_n) - f(\tilde{x})| \leq M|x_n - \tilde{x}|$$

Donc pour tout $n \geq 0$

$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq M|x_n - \tilde{x}|$$

Comme $x_n \neq \tilde{x}$

$$\frac{|x_{n+1} - \tilde{x}|}{|x_n - \tilde{x}|} \leq M$$

Allez à : Exercice 11 :

f) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$.

$$|x_n - \tilde{x}| \leq M^n|x_0 - \tilde{x}|$$

Pour $n = 0$ l'inégalité est évidente, montrons que l'inégalité au rang n entraine l'inégalité au rang $n + 1$. D'après e)

$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq M|x_n - \tilde{x}|$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$|x_{n+1} - \tilde{x}| \leq M|x_n - \tilde{x}| \leq M \times M^n|x_0 - \tilde{x}| = M^{n+1}|x_0 - \tilde{x}|$$

Donc pour tout $n \geq 0$

$$|x_n - \tilde{x}| \leq M^n|x_0 - \tilde{x}|$$

Et enfin $0 < M < 1$ entraine que $M^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, cela montre que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \tilde{x}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

Comme toujours on a deux méthodes, soit on calcule la limite du taux de variation, soit on essaye de montrer que la fonction est C^1 en 0.

Première méthode : taux de variation

$$f(0) = 0$$

Donc

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

Et alors

$$\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}} |x| = 0$$

Par conséquent f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Pour g, il y a un problème, est-ce que g est définie pour $x < 0$? La réponse est oui, mais ce n'est pas une évidence. En général $x \mapsto x^\alpha$ n'est pas définie pour $x < 0$, par exemple $x \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ n'est pas définie pour $x < 0$, lorsque $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ et q impair alors $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, en effet, $x \mapsto x^q$ est une bijection sur $\mathbb{R}$ (ce qui est faux si q est pair), elle admet donc une bijection réciproque notée $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$, ensuite rien n'empêche d'élever cette fonction à une puissance positive.

$$g(0) = 0$$

Donc

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = x^{-\frac{2}{5}}$$

Et alors

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x^{-\frac{2}{5}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = \pm\infty$$

Selon que $x < 0$ ou que $x > 0$, ce qui est important c'est que cette limite n'est pas finie, donc g n'est pas dérivable en 0.

$$h(0) = \cos(0) = 1$$

Donc

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x}$$

Cette limite est indéterminée, on peut penser à utiliser la règle de L'Hospital, mais dériver $x \mapsto \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$ n'a rien de réjouissant (et il faudrait absolument distinguer le cas $x < 0$ et $x > 0$) et puis rien ne dit que cette fonction soit dérivable. Réfléchissons un peu, le numérateur est toujours négatif, alors que le dénominateur est négatif si $x < 0$ et positif si $x > 0$, alors, sauf si la limite existe et qu'elle est nulle, l'éventuelle limite sera différente en 0^- et 0^+. C'est pour cela que l'on va faire deux cas, $x < 0$ et $x > 0$.

Si $x < 0$, on pose $h = \sqrt{-x} = \sqrt{|x|}$, donc $x = -h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{\cos(h) - 1}{-h^2} = \frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

Maintenant il vaut mieux se souvenir du résultat connu en terminale qui dit que

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$$

Sinon, il faut appliquer la règle de L'Hospital deux fois de suite.

Donc

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$, on pose $h = \sqrt{x} = \sqrt{|x|}$ donc $x = h^2$

$$\frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = \frac{\cos(h) - 1}{h^2} = -\frac{1 - \cos(h)}{h^2}$$

Avec le même résultat

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos\left(\sqrt{|x|}\right) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$$

Ce qui montre que le taux de variation de h en 0 n'a pas de limite, par conséquent h n'est pas dérivable en 0.

Allez à : Exercice 12 :

Deuxième méthode

Si $x < 0$, $f(x) = x(-x) = -x^2$ et $f'(x) = -2x$ donc

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

Si $x > 0$, $f(x) = x(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$ donc

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0$$

f est continue en 0 (c'est évident) et la limite de $f'(x)$ en 0 est finie, donc f est de classe C^1 en 0, donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

$$g'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$$

La limite de $g'(x)$ est infinie donc g n'est pas dérivable en 0.

Remarque : le seul cas où on ne peut pas conclure c'est quand la dérivée de la fonction n'admet pas de limite, auquel cas il se peut que le taux de variation admette une limite.

Si $x < 0$ alors $h(x) = \cos\left(\sqrt{-x}\right)$ donc

$$h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}\left(-\sin\left(\sqrt{-x}\right)\right) = \frac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{2\sqrt{-x}}$$

On sait que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0^- \\ x \neq 0}} \frac{\sin\left(\sqrt{-x}\right)}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$$

Si $x > 0$ alors $h(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ donc

$$h'(x) = \frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x \neq 0}} \frac{-\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Les limites à gauche et à droite sont différentes donc h n'est pas dérivable en 0.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. Si $x \in]0,1[$ alors f est continue.
   En $x = 0$

$$\lim_{x - 0^+} x \ln(x) = 0$$

C'est une forme indéterminée dont la limite est connue.
Donc

$$\lim_{x - 0^+} \left(x + \frac{x \ln(x)}{1 - x}\right) = 0$$

On prolonge f en 0 par $f(0) = 0$

En $x = 1$, on pose $h = 1 - x$, c'est mieux que $h = x - 1$ parce qu'alors $h \to 0^+$ lorsque $x \to 1^-$.

$x = 1 - h$

$$f(x) = 1 - h + \frac{(1 - h)\ln(1 - h)}{h} = 1 - h + (1 - h)\frac{\ln(1 - h)}{h}$$

Comme

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1 - h)}{h} = -1$$

Soit parce que c'est la limite du taux de variation de la fonction $h \to \ln(1 - h)$, soit en appliquant la règle de L'Hospital, soit parce que la limite est connue.

Donc

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+}\left(1-h+(1-h)\frac{\ln(1-h)}{h}\right) = 1-1=0$$

On prolonge f en $x=1$ par $f(1)=0$.

2. f ainsi prolongée est continue sur $[0,1]$ et manifestement dérivable sur $]0,1[$, de plus $f(0)=f(1)$, on peut appliquer le théorème de Rolle, il existe $c\in]0,1[$ tel que

$$f'(c)=0$$

Remarque : calculer $f'(x)$ ne me parait pas raisonnable du tout.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Si $x>1$ alors $\ln(x)>0$ donc f est définie, continue et dérivable sur $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\frac{1}{x\ln(x)}$$

Allez à : Exercice 14 :

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x^2}+1>0$, donc g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x)=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}$$

Allez à : Exercice 14 :

h est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, avant d'étudier la dérivabilité on va étudier la continuité, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ h est continue.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = h(0)$$

Car $\frac{1}{x}\to -\infty$ lorsque $x\to 0^-$.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x)-x = 0 = h(0)$$

Car la limite de $x\ln(x)$ en 0 est une forme indéterminée dont le résultat est connu et vaut 0.

Ces deux limites sont égales à $h(0)$ donc h est continue en 0.

h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on va étudier la dérivabilité en 0, il y a deux méthodes :

Première méthode :

On calcule la limite du taux de variation en 0, donc ici on va calculer la limite à gauche et à droite de ce taux

Pour $x<0$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Il s'agit évidemment d'une forme indéterminée, on peut appliquer la règle de L'Hospital ou poser $X=\frac{1}{x}$, ainsi $X\to -\infty$ lorsque $x\to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{X\to -\infty} Xe^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$$

Pour $x>0$

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\frac{x\ln(x)-x}{x}=\frac{x(\ln(x)-1)}{x}=\ln(x)-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}(\ln(x)-1)=-\infty$$

On en conclut que $\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0 donc la fonction n'est pas dérivable en 0.

Deuxième méthode

Le but est de montrer que la fonction est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que h est dérivable et que cette dérivée est continue (c'est un résultat plus fort que ce que demande l'énoncé mais dans de nombreux exercices cela se révèle plus efficace).

Pour $x < 0$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, on pose $X = \frac{1}{x}$, ainsi $X \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$

$$h'(x) = -X^2e^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = 0$$

Pour $x > 0$, $h'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} h'(x) = -\infty$$

$h'(x)$ admet des limites distinctes dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ donc h n'est pas dérivable en 0. (Et donc pas C^1 en 0).

Allez à : Exercice 14 :

Deuxième méthode

Le but est de montrer que la fonction est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que f est dérivable et que cette dérivée est continue (c'est un résultat plus fort que ce que demande l'énoncé mais dans de nombreux exercices cela se révèle plus efficace).

Pour $x < 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, on pose $X = \frac{1}{x}$, ainsi $X \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$

$$f'(x) = -X^2e^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

Pour $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

$f'(x)$ admet des limites distinctes dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ donc f n'est pas dérivable en 0. (Et donc pas C^1 en 0.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. La limite de $\frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}$ en 0 est indéterminée, on regarde la limite du quotient des dérivées du numérateur et du dénominateur

$$\frac{(\cos(x)\,x - \sin(x))'}{(x^2)'} = \frac{-\sin(x)\,x + \cos(x) - \cos(x)}{2x} = \frac{-\sin(x)\,x}{2x} = -\frac{\sin(x)}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2} = 0$$

2. Pour $x \neq 0$ f est définie, continue et dérivable, on étudie la continuité et la dérivabilité en 0

Si $a \neq 0$

$$\frac{\sin(ax)}{x} = a\frac{\sin(ax)}{ax} \xrightarrow[x\to 0]{} a$$

Si $a = 0$

$$\frac{\sin(ax)}{x} = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 = a$$
$$e^{bx} - x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

f est continue en 0 si et seulement si

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

3. f doit-être continue, donc $a = 1$

   Si $x < 0$ alors $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$$

   D'après la question 1.

   Si $x > 0$ alors $f(x) = e^{bx} - x$

$$f'(x) = be^{bx} - 1 \underset{x-0^+}{\longrightarrow} b - 1$$

   Pour $a = 1$ et $b = 1$, $f'(x)$ admet une limite en 0, et f est continue donc f est de classe C^1 en 0, donc dérivable.

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

1. Si $x \neq 0$, f est continue.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax + b = b = f(0)$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

   Donc f est continue si et seulement si $b = 1$.

2. Si $x \neq 0$ alors f est dérivable. Si $x \neq 0$

   Si $x < 0$ alors $f'(x) = a$, si $x > 0$ alors $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \Leftrightarrow -1 = a$$

   Si $b = 1$ et si $a = -1$ alors f est continue en 0 et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

   Donc f est dérivable en 0. Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. On peut dériver cette application comme un quotient mais en la triturant un tout petit peu on peut se ramener à la dérivation d'un produit, ce qui est toujours plus simple

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = e^x x^{-e}$$

   Remarque : l'énoncé à décider de ne définir f que sur $]0, +\infty[$ mais on aurait pu la définir sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = e^x x^{-e} + e^x(-e)x^{-e-1}$$

   Il faut arranger cette expression pour pouvoir trouver son signe, pour cela il faut factoriser, par e^x, çà c'est évident, mais aussi par une puissance de x, le mieux est de factoriser par x^{-e-1} car si on factorise par x^{-e} on se retrouverait avec un terme en $\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = e^x x^{-e-1}(x - e)$$

   Comme $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^x x^{-e-1} > 0$. On en déduit que :

   $\forall x \in]0, e[, f'(x) < 0$ et f est décroissante et $\forall x \in]e, +\infty[, f'(x) > 0$ et f est croissante.

2. Comparer deux réels signifie que l'on cherche à savoir lequel des deux est le plus grand. Comme

$$f(\pi)=\frac{e^\pi}{\pi^e}$$

Le problème est de savoir si $f(\pi)$ est inférieur ou supérieur à 1. Il est clair que $\pi>e$, f étant croissante sur $]e,+\infty[$ on a :

$$f(e)<f(\pi)$$

Et

$$f(e)=\frac{e^e}{e^e}=1$$

On a $f(\pi)>1$ et donc $e^\pi>\pi^e$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. D'abord on peut vérifier que f est bien définie sur $[-1,1]$, en effet

$$-1\le x\le 1\Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0$$

Donc $x\to\sqrt{1-x^2}$ est bien définie sur $[-1,1]$.

Pour $x\neq 0$ f est continue, le problème est de savoir si f est continue en 0. Pour cela il faut montrer que la limite de f en 0 vaut $f(0)$, il s'agit d'une forme indéterminée, on peut penser à utiliser la règle de L'Hospital mais comme il y a des racines, on va plutôt utiliser l'expression conjuguée

$$\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=0=f(0)$$

Donc f est continue en 0 et donc sur $[-1,1]$.

Allez à : Exercice 18 :

2. $x\to\sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$ donc f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$, il reste à montrer que f est dérivable en 0.

Première méthode : on calcule le taux de variation

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{(1+x^2)-(1-x^2)}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=1$$

On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$.

Deuxième méthode : on calcule la limite de $f'(x)$ en 0.

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)'x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)x-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)x^2-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}x^2-\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)x^2-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}x^2}$$
$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}\right)x^2-(1+x^2)\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$
$$=\frac{x^2\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1+x^2}-(1+x^2)\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$
$$=\frac{-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}$$

On a déjà fait un bel effort mais cela ne suffit pas, on tombe sur une forme indéterminée.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^4}}=\frac{1+x^2-(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=\frac{2x^2}{x^2\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=1$$

Il faut bien préciser que f est continue et que $f'(x)$ admet une limite en 0 pour pouvoir conclure que f est dérivable en 0, à dérivée continue et que $f'(0)=1$.

Avec les deux méthodes on conclut que f est dérivable sur $]-1,1[$.

Ici, cette méthode est nettement plus compliquée mais parfois elle est plus simple.

De plus l'énoncé demande de calculer $f'(x)$ donc la deuxième méthode s'imposait.

Pour résoudre $f'(x)=0$ il fallait, de toutes façon calculer $f'(x)$ donc on n'a pas fait ce long calcul pour rien.

Allez à : Exercice 18 :

3. Pour montrer que f' est continue, c'est évident pour $x\neq0$ et en 0 voir la deuxième méthode.

$$\forall x\in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[,\ f'(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}>0\quad\text{et}\quad f'(0)=1>0$$

Il n'y a pas de $x\in\,]-1,1[$ tel que $f'(x)=0$.

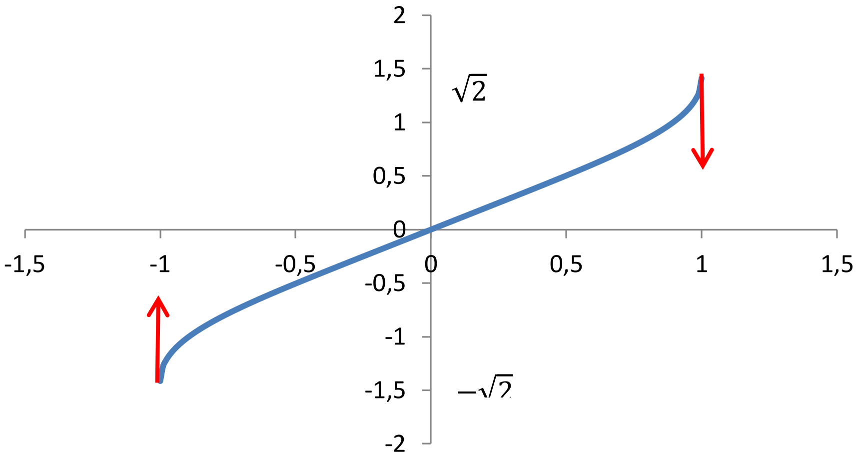
Allez à : Exercice 18 :

4. $f(-1)=-\sqrt{2}$ et $f(1)=\sqrt{2}$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f'(x)>0$, il reste à voir comment se comporte $f'(x)$ en -1^+ et 1^-, comme f' est paire ces deux limite seront égales.

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{2}{\sqrt{1-x^4}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)}=+\infty$$

Car le dénominateur tend vers 0^+. Ce qui signifie que f admet des demi-tangentes verticales en -1 et en 1.

x	-1		1
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|\|$
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$



f est strictement monotone donc f est injective.

Allez à : Exercice 18 :

5. $\hat{f}: [-1,1] \to f([-1,1]) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ est une bijection. Comme $\hat{f}'(0) = 1 \neq 0$ la bijection réciproque est dérivable en 0 comme

$$\hat{f}^{-1}(x) = \frac{1}{\hat{f}'\left(\hat{f}^{-1}(x)\right)}$$

On a

$$\hat{f}^{-1}(0) = \frac{1}{\hat{f}'\left(\hat{f}^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{\hat{f}'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

Si $x \neq 0$ la fonction est C^∞ donc tout va bien. Etudions la fonction en $x = 0$.

Il faut d'abord que la fonction soit continue

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax^3 + bx + c) = c$$

La fonction est continue si et seulement si $c = 1$. Dans ce cas regardons si la fonction est de classe C^1.

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^x = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2ax + b) = b$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) \Leftrightarrow b = 1$$

Comme, lorsque $c = 1$, f est continue, f est de classe C^1 si et seulement si $b = c = 1$.

Si $x < 0$, $f''(x) = e^x$ et si $x > 0$, $f''(x) = 2a$, la première dérivée seconde tend vers 1 et la deuxième tend vers $2a$ donc cette fonction est de classe C^2 en $x = 0$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$ (car bien sûr f' est continue).

Si $x < 0$, $f'''(x) = e^x$ et si $x > 0$, $f'''(x) = 0$, la première dérivée troisième tend vers 1 et la seconde vers 0, donc cette fonction n'est jamais de classe C^2 en $x = 0$.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

1. Pour tout $x \neq 0$ la fonction est de classe C^∞ donc dérivable.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$$

Certes, il s'agit d'une forme indéterminée, mais soit on la considère comme connue (de la terminale), soit on la considère comme le taux de variation de la fonction $x \to \sin(x)$ en 0 et cette limite est la valeur de la fonction dérivée en 0, c'est-à-dire $\cos'(0) = 1$, soit on applique la règle de Riemann.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = 1 = f(0)$$

Finalement on a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Ce qui entraine que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = f(0)$$

Ce qui montre que f est continue en $x = 0$.

Allez à : Exercice 20 :

2. Calculons la fonction dérivée pour $x < 0$ et pour $x > 0$.

Pour $x < 0$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2}$$

La limite de $f'(x)$ en $x = 0$ est une forme indéterminée, utilisons la règle de L'Hospital.

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$g'(x) = -\sin(x)\,x + \cos(x) - \cos(x) = -x\sin(x)$$

$$h'(x) = 2x$$

Donc

$$\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{-x\sin(x)}{2x} = -\frac{\sin(x)}{2}$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -\frac{\sin(x)}{2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$$

Pour $x > 0$

$$f'(x) = 2x$$

Donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x = 2$$

On en déduit que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)$$

Ce qui montre que f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Conclusion :

Pour $x < 0$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2}$$

Pour $x > 0$

$$f'(x) = 2x$$

Pour $x = 0$, f n'est pas dérivable.

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} (2x+\lambda x^2) = 2\times\frac{1}{2}+\lambda\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{\lambda}{4}$$

f est continue si et seulement si

$$\frac{2}{3} = 1+\frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{4}{3}$$

2. Une condition nécessaire pour que f soit continue est que f soit continue, donc s'il y a une valeur de λ pour laquelle f est dérivable, ce ne peut être que $-\frac{4}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-\dfrac{4}{3}x^2 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Si $0 \le x < \frac{1}{2}$ alors

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

Et

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} -\frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{9}$$

Si $\frac{1}{2} < x \le 1$ alors

$$f'(x) = 2-\frac{8}{3}x$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \left(2-\frac{8}{3}x\right) = 2-\frac{8}{3}\times\frac{1}{2} = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$f'(x)$ n'a pas de limite lorsque $x\to\frac{1}{2}$ donc f n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$. Par conséquent il n'existe pas de $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que la fonction f soit dérivable.

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1. Pour tout $x\neq 0$, $x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue et l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

   En $x=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} e^{\frac{-1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

   Donc f est continue en 0.

2.

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = (-x^{-2})'e^{-\frac{1}{x^2}} = -(-2)x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}$

$$f'(x) = 2X^3e^{-X^2}$$

Lorsque $x\to 0^\pm$, $-X^2\to-\infty$ donc $e^{-X^2}\to 0$ alors que $2X^3\to\pm\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée mais l'exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes. Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = \lim_{X \to \pm\infty} 2X^3 e^{-X^2} = 0$$

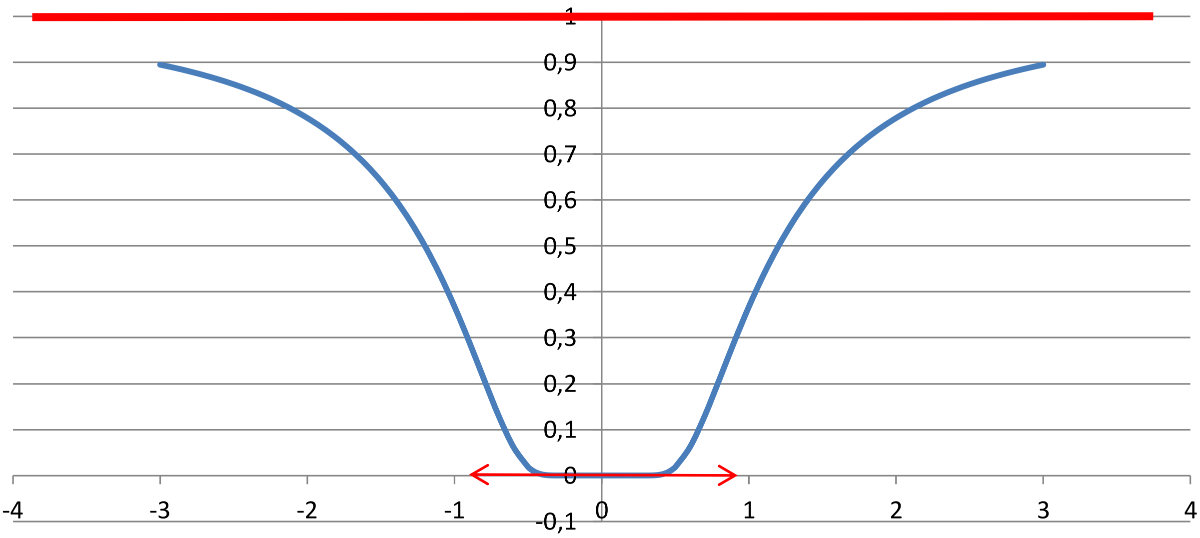
$f'(x)$ admet une limite en 0 et f est continue en 0 donc f est de classe C^1 en 0, ce qui signifie que f est dérivable et que $f'(0) = 0$.

4.

$$\lim_{x \to \pm\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

5. $f'(x)$ a le même signe que x^3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1



Attention, ce dessin donne l'impression qu'il y a un « plat » au voisinage de 0, c'est juste que les valeurs sont très petites

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin(x) - \sin(x + 2\pi)| = 0$$

Ce qui équivaut à ce que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 2\pi)$, f est 2π périodique.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$,

Première méthode

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

Car la fonction sin est une fonction continue. Cela entraine que pour tout

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$$

Cela montre que la fonction f est continue en x_0, ceci étant vrai pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode

Pour montrer que f est continue en un $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque.

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)|$$

Donc

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| \leq \lim_{x \to x_0} |\sin(x) - \sin(x_0)| = 0$$

Car sin est continue en x_0

On en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

Ce qui est équivalent à

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Autrement que f est continue en x_0 quelconque, et donc sur $\mathbb{R}$

3. Remarques préliminaires

Dans ce genre d'exercice il faut montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = l$$

Autrement dit que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} - l \right| = 0$$

Pour cela il faut majorer $\left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} - l \right|$ par une expression tendant vers 0.

Le problème est qu'il faudrait deviner l à priori et que l'on ne connait pas $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ce n'est pas gagné d'avance. Il doit y avoir y avoir un truc plus simple.

D'après l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \left| \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right|$$

Puis en divisant par $\left| x - \frac{\pi}{2} \right|$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right| \leq \left| \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right|$$

A droite, il s'agit du taux de variation de la fonction sin en $\frac{\pi}{2}$ qui tend vers

$$\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ce qui entraine que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \right| = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ça, c'est un coup de chance parce que du coup, on en déduit que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left| \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} - 0 \right| = 0$$

Et d'après les remarques préliminaire, cela signifie que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Si on avait trouvé une limite non nulle on n'aurait rien pu conclure.

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. Si $x > 1$ alors $\ln(x) > 0$ donc f est définie, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} + 1 > 0$, donc g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{2xe^{x^2}}{1 + e^{x^2}}$$

3. h est évidemment définie sur $\mathbb{R}$, avant d'étudier la dérivabilité on va étudier la continuité, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ h est continue.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Car $\frac{1}{x} \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x) - x = 0$$

Car la limite de $x\ln(x)$ en 0 est une forme indéterminée dont le résultat est connu et vaut 0.
Ces deux limites sont égales donc h est continue en 0.
h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on va étudier la dérivabilité en 0, il y a deux méthodes :
Première méthode :
On calcule la limite du taux de variation en 0, donc ici on va calculer la limite à gauche et à droite de ce taux
Pour $x < 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$$

Il s'agit évidemment d'une forme indéterminée, on peut appliquer la règle de L'Hospital ou poser $X = \frac{1}{x}$, ainsi $X \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X \to -\infty} Xe^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Pour $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\ln(x) - x}{x} = \frac{x(\ln(x) - 1)}{x} = \ln(x) - 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (\ln(x) - 1) = -\infty$$

On en conclut que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'a pas de limite en 0 donc la fonction n'est pas dérivable en 0.
Deuxième méthode
Le but est de montrer que la fonction est de classe C^1 en 0, c'est-à-dire que f est dérivable et que cette dérivée est continue (c'est un résultat plus fort que ce que demande l'énoncé mais dans de nombreux exercices cela se révèle plus efficace).
Pour $x < 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, on pose $X = \frac{1}{x}$, ainsi $X \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$

$$f'(x) = -X^2 e^X$$

Il s'agit encore d'une forme indéterminée mais le résultat est connu, c'est l'exponentielle qui l'emporte, la limite est donc nulle

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

Pour $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$$

$f'(x)$ admet des limites distinctes dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ donc f n'est pas dérivable en 0. (Et donc pas C^1 en 0.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

Il est clair que ces fonctions sont continues en 0, c'est nécessaire. On a $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$

Première méthode :

On va montrer que f est de classe C^1 en 0 (c'est-à-dire que f est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0).

Pour $x < 0$, $f(x) = -x\sin(x)$ et $f'(x) = -\sin(x) - x\cos(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

Pour $x > 0$, $f(x) = x\sin(x)$ et $f'(x) = x\sin(x) + x\cos(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

Ces deux limites sont finies et égales et f est continue en 0, donc f est de classe C^1 en 0, on en déduit que f est dérivable en 0.

Même technique pour g

Pour $x < 0$, $g(x) = \ln(1-x)$ et $f'(x) = -\frac{1}{1-x}$, donc

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = -1$$

Pour $x > 0$, $g(x) = \ln(1+x)$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 1$$

Ces deux limites sont finies et différentes donc g n'est pas dérivable en 0.

Deuxième méthode :

Pour montrer que f est dérivable il faut montrer que le taux de variation

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Admet une limite finie en 0, avec $x \neq 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|\sin(x)}{x} = \frac{|x|}{x}\sin(x)$$

Pour $x \neq 0$, $\frac{|x|}{x} = \pm 1$, cette expression est bornée et $\sin(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

f est dérivable en 0.

Pour montrer que g est dérivable il faut montrer que le taux de variation

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + |x|)}{x}$$

Admet une limite finie en 0, avec $x \neq 0$.

Pour $x < 0$,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 - x)}{x}$$

Il s'agit évidemment d'une forme indéterminée, soit on applique la règle de L'Hospital, soit on applique le résultat connu

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$$

Avec $t = -x$ pour trouver que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(1 - x)}{x} = -1$$

Pour $x > 0$,

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Ces deux limites sont distinctes donc g n'est pas dérivable.

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1. Comme $\forall x\in\mathbb{R}, 3+\sin(x)\geq 2$, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_1'(x)=\frac{\cos(x)}{3+\sin(x)}$$

Allez à : Exercice 26 :

2. Comme $\forall x\in\mathbb{R}, \sqrt{1+x^2}\geq 1$, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$
On peut dériver cette fonction en considérant qu'elle est de la forme $\ln\big(u(x)\big)$ mais ce n'est pas très malin, en effet
$$f_2(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$
Donc
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_2'(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{1+x^2}=\frac{x}{1+x^2}$$

Allez à : Exercice 26 :

3. $\forall x\in\mathbb{R}, 2+\cos(x)\geq 1$ et $2-\cos(x)\geq 1$ donc f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On peut dériver cette fonction en considérant qu'elle est de la forme $\ln\big(u(x)\big)$ mais ce n'est pas très malin, en effet
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_3(x)=\ln(2+cos(x))-\ln(2-cos(x))$$
Donc
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_3'(x)=\frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}-\left(-\frac{-\sin(x)}{2-\cos(x)}\right)=\frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}-\frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$$
Ce résultat est juste mais il faut toujours essayer d'arranger les choses, ici il faut réduire au même dénominateur dans le but, si cela était demander, de trouver le signe de cette expression en fonction de x.
$$\forall x\in\mathbb{R}, f_3'(x)=-\sin(x)\left(\frac{1}{2+\cos(x)}+\frac{1}{2-\cos(x)}\right)=-\sin(x)\frac{2-\cos(x)+2+\cos(x)}{(2+\cos(x))(2-\cos(x))}=$$
$$=\frac{-4\sin(x)}{4-\cos^2(x)}$$
Remarque : avec cette expression il est clair que $f_3'(x)$ a le même signe que $-\sin(x)$.

Allez à : Exercice 26 :

4. Attention, il ne faut pas dériver cette fonction comme si elle était de la forme x^α car le « α » n'est pas constant, il s'agit d'une fonction « puissance » qui s'écrit
$$f_4(x)=e^{(x+1)\ln(x)}$$
Cette fonction est dérivable pour tout $x>0$
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_4'(x)=\big((x+1)\ln(x)\big)'e^{(x+1)\ln(x)}=\left(\ln(x)+\frac{x+1}{x}\right)e^{(x+1)\ln(x)}$$
Là encore il faut réduire au même dénominateur
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_4'(x)=\frac{x\ln(x)+x+1}{x}e^{(x+1)\ln(x)}$$
Remarque : heureusement que l'on ne demande pas le signe de $f_4'(x)$ parce que ce n'est pas si simple, pour ceux que cela intéresse, $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, f_4'(x)>0$.

Allez à : Exercice 26 :

5. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$, il faut quand même faire une petite transformation si on veut dériver cette fonction simplement

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)^2 = e^{2x}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, f_5(x) = \sin((e^x)^2) = \sin(e^{2x})$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_5'(x) = 2e^{2x}\cos(e^{2x})$$

Allez à : Exercice 26 :

6. Attention, il ne faut pas dériver cette fonction comme si elle était de la forme x^α car le « α » n'est pas constant, il s'agit d'une fonction « puissance » qui s'écrit

$$f_6(x) = e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)}$$

Cette fonction est dérivable pour tout $x > 0$.

Pour éviter d'écrire une formule longue à écrire, on va d'abord dériver

$$g_6 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}\ln(x)$$

$$g_6'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)'\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\cos(x)\,x - \sin(x)}{x^2}\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x^2}$$
$$= \frac{\cos(x)\,x\ln(x) - \sin(x)\ln(x) + \sin(x)}{x^2}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_6'(x) = \frac{\cos(x)\,x\ln(x) - \sin(x)\ln(x) + \sin(x)}{x^2} e^{\frac{\sin(x)}{x}\ln(x)}$$

Remarque : $f_6'(x)$ a le même signe que $\cos(x)\,x\ln(x) - \sin(x)\ln(x) + \sin(x)$ et heureusement que l'on ne se demande pas quel est son signe, là, je cale et je pense que ce n'est pas gagné d'avance !

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

Donc les fonctions

$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

N'admettent pas de limites en 0 (ni de limite finie ni de limite infinie)

D'après les remarques préliminaires f n'est pas continue en 0, par suite f est ni dérivable ni de classe C^1.

Pour $x \neq 0$, g est le produit d'une fonction bornée $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x \mapsto x$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$$

Ce qui signifie que g est continue en 0.

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'après les remarques préliminaires le taux de variation de g en 0 n'admet pas de limite, donc g n'est pas dérivable en 0, par conséquent g n'est pas de classe C^1 en 0.

Pour $x \neq 0$, h est le produit d'une fonction bornée $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x \mapsto x^2$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h(x)=0=h(0)$$

Ce qui signifie que h est continue en 0.

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour $x\neq 0$, le taux de variation de h en 0 est le produit d'une fonction bornée $x\mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction qui tend vers 0 $x\mapsto x$ en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0}=0$$

Ce taux de variation admet une limite donc h est dérivable en 0 et $h'(0)=0$ (le résultat de la limite)

$$\forall x\neq 0, h'(x)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x\mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 en 0, mais $x\mapsto\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 donc h' n'admet pas de limite en 0 donc h' n'est pas continue en 0, ce qui signifie que h n'est pas de classe C^1 en 0.

Pour $x\neq 0$, i est le produit d'une fonction bornée $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x\mapsto x^3$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} i(x)=0=i(0)$$

Ce qui signifie que i est continue en 0.

$$\frac{i(x)-i(0)}{x-0}=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour $x\neq 0$, le taux de variation de i en 0 est le produit d'une fonction bornée $x\mapsto\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par une fonction $x\mapsto x^2$ qui tend vers 0 en 0 donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{i(x)-i(0)}{x-0}=0$$

Ce taux de variation admet une limite donc i est dérivable en 0 et $i'(0)=0$ (le résultat de la limite)

$$\forall x\neq 0, i'(x)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x^3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$x\mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 en 0 et$x\mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tendent vers 0 en 0 (toujours car elles sont le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0) , donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} i'(x)=0$$

Le fait que $i'(x)$ admette une limite finie en 0 et que i soit continue en 0 montre que i est de classe C^1.

Remarque :

En montrant que i est de classe C^1 en 0 on montre au passage que i est dérivable en 0, du coup, dans cette question on pouvait se passer du calcul de la limite du taux de variation de i en 0.

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

1. Les fonctions f_n sont continues sur un intervalle fermé borné $[0,1]$ donc les fonctions f_n sont bornées et atteignent leur maximum pour un réel $\alpha_n\in[0,1]$. Si $\alpha_n\in\{0,1\}$, que ce passe-t-il ? Comme $f_n(0)=0^n\times g(0)=0$ et $f_n(1)=1^n\times g(1)=0$, cela signifie que la fonction f_n est constante et nulle sur $[0,1]$, dans ce cas particulier n'importe valeur strictement comprise entre 0 et 1 vérifie
$$\sup_{x\in]0.1[}|f_n(x)|=f_n(\alpha_n)(=0)\quad\text{et}\quad f_n'(\alpha_n)=0$$
Si $\alpha_n\in]0,1[$ $|f_n|$ atteint un extremum à l'intérieur de l'intervalle $[0,1]$ donc sa dérivée est nulle.
2.

$$f_n'(x) = nx^{n-1}g(x) + x^n g'(x) = x^{n-1}\big(ng(x) + xg'(x)\big)$$

Par conséquent $f_n'(\alpha_n) = 0$ et $\alpha_n \in]0,1[$ entraine que

$$ng(\alpha_n) + \alpha_n g'(\alpha_n) = 0$$

Donc

$$g(\alpha_n) = -\frac{\alpha_n g'(\alpha_n)}{n}$$

Et

$$f(\alpha_n) = \alpha_n^n\left(-\frac{\alpha_n g'(\alpha_n)}{n}\right) = -\frac{\alpha_n^{n+1} g'(\alpha_n)}{n}$$

On en déduit que

$$|f(\alpha_n)| = \left|\frac{\alpha_n^{n+1} g'(\alpha_n)}{n}\right| = \frac{|\alpha_n|^{n+1}|g_n'(\alpha_n)|}{n} \le \frac{|1|^{n+1}|g_n'(\alpha_n)|}{n} = \frac{|g_n'(\alpha_n)|}{n}$$

Comme g' est continue, g' est bornée, ce qui signifie qu'il existe M telle que pour tout $x \in [0,1]$, $|g'(x)| \le M$

D'où

$$|f(\alpha_n)| \le \frac{M}{n} \to 0$$

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

Pour utiliser le théorème des accroissements finis, il faut d'abord montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $x \ne 1$, f est dérivable. Etudions la fonction en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3 - x^2}{2} = 1 = f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 = f(1)$$

Ce qui montre que la fonction est continue en $x = 1$.

Pour $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-2x) = -x$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1$$

Pour $x > 1$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1$$

Le fait que f soit continue en 1 et que $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, montre que f est dérivable en $x = 1$.

Bref, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier f est continue sur $[0,2]$ et dérivable sur $]0,2[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0,2]$ donc il existe $c \in]02[$ tel que : $f(2) - f(0) = (2-0)f'(c)$.

$$f(2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(0) = \frac{3 - 0^2}{2} = \frac{3}{2}$$

Par conséquent

$$f(2) - f(0) = (2-0)f'(c) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 2f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

Supposons que $0 \le c \le 1$ alors

$$f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -c = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

On vérifie que $0 \le \frac{1}{2} \le 1$ donc $c = \frac{1}{2}$ est une solution.

Supposons que $1 < c \le 2$ alors

$$f'(c) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

On a $-\sqrt{2} \notin]1,2]$ et $\sqrt{2} \in]1,2]$, donc $\sqrt{2}$ est solution, il y a donc deux solutions $c = \frac{1}{2}$ et $c = \sqrt{2}$.

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

1. Pour $x \neq y$. La fonction sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x,y]$ si $x < y$ (ou sur $[y,x]$ si $y < x$). Il existe $c \in]x,y[$ (ou $]y,x[$) tel que
$$\sin(x) = \sin(y) + (x-y)\cos(c)$$
Donc
$$\sin(x) - \sin(y) = (x-y)\cos(c)$$
On prend la valeur absolue
$$|\sin(x) - \sin(y)| = |x-y| \times |\cos(c)|$$
Puis comme $|\cos(c)| \leq 1$ on a
$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$$
Pour $x = y$ l'inégalité est triviale.
2. La fonction $f: x \to \ln(1+x)$ est continue est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis.
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$
Par conséquent il existe $c \in]0,x[$ tel que
$$\ln(1+x) = \ln(1) + (x+1-1) \times \frac{1}{1+c} = \frac{x}{1+c}$$
$$0 < c < x \Leftrightarrow 1 < 1+c < 1+x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+c} < x$$
Car $x > 0$
On en déduit que
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

Dans ce genre d'exercice on ne sait pas forcément comment commencer mais f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis. Il existe $c \in]0,1[$ tel que
$$f(1) - f(0) = (1-0)f'(c) \Leftrightarrow f(1) = f'(c)$$
Cela montre que $f(1) \neq 0$,
Supposons que $f(1) > 0$ et faisons l'hypothèse qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) < 0$ (en espérant arriver à une contradiction).
f étant continue sur $[x_0, 1]$ et comme $f(x_0) < 0$ et $f(1) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in]x_0, 1[$ tel que $f(x_1) = 0$. Puis appliquons le théorème de Rolle entre 0 et x_1 (f vérifie évidemment ses hypothèses), il existe $d \in]0, x_1[$ tel que $f'(d) = 0$, ce qui contredit l'énoncé.
Si $f(1) < 0$ on suppose qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) > 0$ et on fait pareil.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

f' est une fonction continue sur $[0,1]$ donc f' a un minimum et f' atteint ce minimum, autrement dit il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f'(x_0) = \min\{f'(x),\ x \in [0,1]\}$, on pose $m = f'(x_0) > 0$ car pour tout $x \in [0,1]$ $f'(x) > 0$.

Puis on applique le théorème des accroissements finis à f entre 0 et $x \in]0,1]$, f vérifie les hypothèses du théorème, donc il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$$

Ce qui équivaut à

$$f(x) = xf'(c) > xf'(x_0) = mx$$

Allez à : Exercice 32 :

Correction exercice 33 :

Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ défini par

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = -\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -g(0)$$

La fonction g est continue, $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. f_n est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, de plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$, on peut appliquer le théorème de Rolle alors il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$
2. $f_n'(x) = nx^{n-1}\sin(\pi x) + x^n \cos(\pi x) = x^{n-1}(n\sin(\pi x) + \pi x\cos(\pi x))$

$$f_n'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow {\alpha_n}^{n-1}(n\sin(\pi\alpha_n) + \alpha_n\cos(\pi\alpha_n)) = 0 \Leftrightarrow n\sin(\pi\alpha_n) + \pi\alpha_n\cos(\pi\alpha_n)$$

Car $\alpha_n \neq 0$

Donc

$$f_n'(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi\alpha_n) = -\frac{\pi\alpha_n}{n}\cos(\pi\alpha_n)$$

On en déduit que

$$f_n(\alpha_n) = {\alpha_n}^n\sin(\pi\alpha_n) = -\pi\frac{{\alpha_n}^{n+1}}{n}\cos(\pi\alpha_n)$$

3.

$$|f_n(\alpha_n)| = \left|-\pi\frac{{\alpha_n}^{n+1}}{n}\cos(\pi\alpha_n)\right| = \frac{\pi}{n}|{\alpha_n}^{n+1}\cos(\pi\alpha_n)| < \frac{\pi}{n}$$

Car $|{\alpha_n}^{n+1}| < 1$ et $|\cos(\pi\alpha_n)| \leq 1$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$$

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

D'après le théorème de Rolle (les hypothèses sont clairement vérifiées), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0$$

La fonction f vérifie $\forall x \in]a,b[, f''(x) \leq 0$, ce qui signifie que la fonction f' est décroissante, autrement dit si $x \leq c$ alors $f'(x) \geq f'(c) = 0$ et si $x \geq c$ alors $f'(x) \leq f'(c) = 0$. La fonction f est croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$. On en déduit que

$$x \in [a,c], 0 = f(a) \leq f(x) \quad \text{et} \quad x \in [c,b], f(x) \geq f(b) = 0$$

Ce qui montre bien que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle donc il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Si $t \in]a,c[$ alors $a < t < c$ alors $f'(t) > f'(c) = 0$ (car f' est décroissante).
   Si $t \in]c,b[$ alors $c < t < b$ alors $f'(t) < f'(c) = 0$ (car f' est décroissante).
3. Soit $x \in [a,c]$ et $y \in [a,c]$ avec $x < y$, f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc il existe $d \in]x,y[\subset]a,c[$ tel que
   $$f(y) - f(x) = f'(d)(y-x) > 0$$
   Car $y > x$ et $f'(d) > 0$ d'après la question 2. On en déduit que pour tout
   $$x \in [a,c], \qquad f(y) > f(x)$$
   donc f est strictement croissante sur $[a,c]$.
   Soit $x \in [c,b]$ et $y \in [c,b]$ avec $x < y$, f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$ donc il existe $e \in]x,y[\subset]c,b[$ tel que
   $$f(y) - f(x) = f'(e)(y-x) > 0$$
   Car $y > x$ et $f'(e) < 0$ d'après la question 2. On en déduit que pour tout
   $$x \in [c,b], \qquad f(y) < f(x)$$
   donc f est strictement décroissante sur $[c,b]$.
4. D'après la question 3. La fonction est strictement croissante sur $[a,c]$ et strictement décroissante sur $[c,b]$ donc elle admet un maximum global en $x = c$.
5. f est croissante sur $[a,c]$ donc pour tout $x \in]a,c]$, $x < a$, donc $f(x) \geq f(a) = 0$ et f est strictement décroissante sur $[c,b]$ donc pour tout $x \in [c,b[$, $x > b$ donc $f(x) \geq f(b) = 0$
   Comme $f(a) = f(b) = 0$, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

Allez à : Exercice 36 :

Correction exercice 37 :

1. $g: x \to \ln(x)$, g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g entre a et b. $g'(x) = \frac{1}{x}$ donc il existe $c \in]a,b[$ tel que :
   $$\ln(b) - \ln(a) = (b-a) \times \frac{1}{c}$$
   $$0 < a < c < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a}$$
   Car $b - a > 0$.
   Donc
   $$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}$$
2.
   2.1. Première méthode :
   $f(0) = f(1)$ et f est C^1 sur $[0,1]$ d'après le théorème de Rolle il existe $\alpha \in]0.1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$, la fonction f' étant strictement décroissante, pour tout x tel que $0 < x < \alpha$, $f'(0) > f'(x) > f'(\alpha) = 0$.
   Deuxième méthode :
   f' est continue et $f'(0) > 0$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha \geq 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha]$

$$|f'(x)-f'(0)|<\epsilon$$

Ce qui entraine que

$$f'(0)-\epsilon<f'(x)<f'(0)+\epsilon$$

Il suffit de prendre $\epsilon=\frac{f'(0)}{2}$ pour montrer que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)>0$.

2.2. Première méthode :

Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et α, les hypothèses sont évidemment vérifiées, il existe $c\in]0,\alpha[$ tel que

$$f(\alpha)-f(0)=\alpha f'(c)$$

Comme $f(0)=0$ et $f'(c)>0$, on a $f(\alpha)>0$

Deuxième méthode :

D'après 2.1. la dérivée est strictement positive sur l'intervalle $]0,\alpha]$ et la fonction est nulle en 0 donc elle est strictement croissante sur $[0,\alpha]$, par conséquent $0<\alpha\Rightarrow 0=f(0)<f(\alpha)$.

2.3. S'il existe $\beta\in]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées entre 0 et β et entre β et 1 donc il existe $c_1\in]0,\beta[$ et $c_2\in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=0$ et $f'(c_2)=0$, comme $f''(x)<0$ entraine que f' étant strictement décroissante ce « c » est unique, d'où la contradiction

2.4. D'après 2.2. il existe une valeur $\alpha\in]0,1[$ telle que $f(\alpha)>0$, d'après 2.3. f ne s'annule pas sur $]0,1[$ et f est continue, par conséquent pour tout $x\in]0,1[$, $f(x)>0$.

3. Soit $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=ax+(1-x)b$

$$g(0)=b;\quad g(1)=a;\quad g'(x)=a-b<0$$

Donc g est une bijection décroissante de $[0,1]$ sur $[a,b]$ en fait le fait que g soit bijective n'a pas beaucoup d'importance mais cela permet d'affirmer facilement que $g([0,1])=[a,b]$ et donc que $g(x)>0$ sur $[0,1]$, le reste de la fonction ne pose pas de problème donc f est définie, continue, et dérivable autant de fois que l'on veut.

$$f(0)=\ln(0\times a+(1-0)b)-0\times\ln(a)-(1-0)\ln(b)=\ln(b)-\ln(b)=0$$
$$f(1)=\ln(1\times a+(1-1)b)-1\times\ln(a)-(1-1)\ln(b)=\ln(a)-\ln(a)=0$$

$$\forall x\in[0,1],\qquad f'(x)=\frac{a-b}{xa+(1-x)b}-\ln(a)+\ln(b)$$

$$\forall x\in[0,1],\qquad f''(x)=-\frac{(a-b)(a-b)}{(xa+(1-x)b)^2}=-\frac{(a-b)^2}{(xa+(1-x)b)^2}<0$$

$$f'(0)=\frac{a-b}{b}+\ln(b)-\ln(a)>\frac{a-b}{b}+\frac{b-a}{b}=0$$

D'après 1. Inégalité de gauche.

$$f'(1)=\frac{a-b}{a}+\ln(b)-\ln(a)<\frac{a-b}{a}+\frac{b-a}{a}=0$$

D'après 1. Inégalité de droite.

D'après 2.4. la fonction f est strictement positive sur $]0,1[$ donc

$$\ln(xa+(1-x)b)-x\ln(a)-(1-x)\ln(b)>0$$

Autrement dit

$$\forall x\in]0,1[,\qquad x\ln(a)+(1-x)\ln(b)<\ln(xa+(1-x)b)$$

Allez à : Exercice 37 :

Correction exercice 38 :

4. $g:x\to e^x$, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g entre a et b. $g'(x)=e^x$ donc il existe $c\in]a,b[$ tel que :

$$e^b-e^a=(b-a)\times e^c$$
$$a<c<b\Rightarrow e^a<e^c<e^b\Rightarrow(b-a)e^a<e^b-e^a<(b-a)e^b$$

Car $b-a>0$.

5.

5.1. Première méthode :

$f(0)=f(1)$ et f est C^1 sur $[0,1]$ d'après le théorème de Rolle il existe $\alpha\in\,]0,1[$ tel que $f'(\alpha)=0$, la fonction f' étant strictement croissante, pour tout x tel que $0<x<\alpha$, $f'(0)<f'(x)<f'(\alpha)=0$.

Deuxième méthode :

f' est continue et $f'(0)<0$ donc pour tout $\epsilon>0$ il existe $\alpha\geq 0$ tel que pour tout $x\in[0,\alpha]$

$$|f'(x)-f'(0)|<\epsilon$$

Ce qui entraine que

$$f'(0)-\epsilon<f'(x)<f'(0)+\epsilon$$

Il suffit de prendre $\epsilon=-\frac{f'(0)}{2}$ pour montrer que pour tout $x\in[0,\alpha]$, $f'(x)<0$.

5.2. Première méthode :

Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et α, les hypothèses sont évidemment vérifiées, il existe $c\in\,]0,\alpha[$ tel que

$$f(\alpha)-f(0)=\alpha f'(c)$$

Comme $f(0)=0$ et $f'(c)<0$, on a $f(\alpha)<0$

Deuxième méthode :

D'après 2.1. la dérivée est strictement négative sur l'intervalle $]0,\alpha]$ et la fonction est nulle en 0 donc elle est strictement décroissante sur $[0,\alpha]$, par conséquent $0<\alpha\Rightarrow 0=f(0)>f(\alpha)$.

5.3. S'il existe $\beta\in\,]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$, les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées entre 0 et β et entre β et 1 donc il existe $c_1\in\,]0,\beta[$ et $c_2\in\,]\beta,1[$ tel que $f'(c_1)=0$ et $f'(c_2)=0$, comme $f''(x)>0$ entraine que f' étant strictement croissante ce « c » est unique, d'où la contradiction, par conséquent il n'existe pas de $\beta\in\,]0,1[$ tel que $f(\beta)=0$.

5.4. D'après 2.2. il existe une valeur $\alpha\in\,]0,1[$ telle que $f(\alpha)<0$, d'après 2.3. f ne s'annule pas sur $]0,1[$ et f est continue, par conséquent pour tout $x\in\,]0,1[$, $f(x)<0$.

6. f est définie, continue, et dérivable autant de fois que l'on veut.

$$f(0)=e^{0\times a+(1-0)b}-0\times e^a-(1-0)e^b=e^b-e^b=0$$

$$f(1)=e^{1\times a+(1-1)b}-e^a-(1-1)e^b=e^a-e^a=0$$

$$\forall x\in[0,1],\qquad f'(x)=(a-b)e^{ax+(1-x)b}-e^a+e^b$$

$$\forall x\in[0,1],\qquad f''(x)=(a-b)^2e^{ax+(1-x)b}>0$$

$$f'(0)=(a-b)e^b-e^a+e^b=(a-b)e^b+e^b-e^a<(a-b)e^b+(b-a)e^b=0$$

D'après 1. Inégalité de droite.

$$f'(1)=(a-b)e^a-e^a+e^b=(a-b)e^a+e^b-e^a>(a-b)e^b+(b-a)e^b=0$$

D'après 1. Inégalité de gauche.

D'après 2.4. la fonction f est strictement négative sur $]0,1[$ donc

$$e^{xa+(1-x)b}-xe^a-(1-x)e^b<0$$

Pour tout $x\in\,]0,1[$

$$e^{xa+(1-x)b}<xe^{\mathrm{a}}+(1-x)e^b$$

Allez à : Exercice 38 :

Correction exercice 39 :

1. Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$f_p(x)=\ln(\ln(p+x))$$

Entre $x=0$ et $x=1$

Vérifions que cette fonction vérifie les hypothèses,

$$0\leq x\leq 1\Leftrightarrow p\leq x+p\leq p+1\Leftrightarrow \ln(p)\leq\ln(x+p)\leq\ln(p+1)$$

Il faut encore prendre le logarithme, ce qui est possible car $2 \leq p$ entraine que $\ln(2) \leq \ln(p)$ et bien sur $\ln(2) > 0$, donc

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \ln(p) \leq \ln(x+p) \leq \ln(p+1) \Leftrightarrow \ln(\ln(p)) \leq \ln(\ln(x+p)) \leq \ln(\ln(p+1))$$

Cela montre que la fonction est définie et continue sur $[0,1]$, et qu'elle est dérivable sur $[0,1]$ donc sur $]0,1[$.

$$f_p'(x) = \frac{1}{\ln(p+x)} \times \frac{1}{p+x}$$

Il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f_p(1) - f_p(0) = (1-0)\frac{1}{\ln(p+c)} \times \frac{1}{p+c}$$

Ce qui équivaut à

$$\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln(p)) = \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)}$$

2.

$$\begin{cases} p+c > p > 0 \\ \ln(p+c) > \ln(p) > 0 \end{cases} \Rightarrow (p+c)\ln(p+c) > p\ln(p) > 0 \Rightarrow \frac{1}{(p+c)\ln(p+c)} < \frac{1}{p\ln(p)}$$

3.

$$\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) < \frac{1}{2\ln(2)}$$
$$\ln(\ln(4)) - \ln(\ln(3)) < \frac{1}{3\ln(3)}$$
$$\vdots$$
$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(n-1)) < \frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$$
$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) < \frac{1}{n\ln(n)}$$

En faisant la somme de ces $n-1$ lignes

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) < \frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\ln(n+1)) = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln(2)} + \frac{1}{3\ln(3)} + \cdots + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = +\infty$$

Allez à : Exercice 39 :

Correction exercice 40 :

1. Soient a et b deux réels avec $a < b$, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$
2. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction ln , qui est C^∞, il existe $c \in]n, n+1[$ tel que :
$$\ln(n+1) - \ln(n) = (n+1-n) \times \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$
Comme pour $n \geq 1$
$$n < c < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < c < \frac{1}{n}$$
On a
$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

3. En appliquant la question 2 à n, puis $n+1$,…, puis à $n+n-1=2n$

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$
$$\frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n+(n-2)+1} < \ln(n+(n-2)+1) - \ln\big(n+(n-2)\big) < \frac{1}{n+(n-2)}$$
$$\frac{1}{n+(n-1)+1} < \ln(n+(n-1)+1) - \ln\big(n+(n-1)\big) < \frac{1}{n+(n-1)}$$

Puis on fait la somme de ces n inégalités

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln(2n) - \ln(n) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

Car dans le terme central les logarithmes se simplifient

Cela donne

$$u_n < \ln\left(\frac{2n}{n}\right) < \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2n}$$

L'inégalité de droite donne

$$u_n < \ln(2)$$

Et celle de gauche donne

$$\ln(2) - \frac{1}{2n} < u_n$$

En réunissant ces deux inégalités

$$\ln(2) - \frac{1}{2n} < u_n < \ln(2)$$

Le théorème des gendarmes entraine que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$$

Autre façon de faire, on applique la question 2 à $n+k$ $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\frac{1}{n+k+1} < \ln(n+k+1) - \ln(n+k) < \frac{1}{n+k}$$

On fait la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} < \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k)) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

Donc

$$u_n < \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) < \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2n}$$

En faisant le changement d'indice $k' = k+1$ dans la première somme, si $k=0$ alors $k'=1$ et si $k=n-1$ alors $k'=n$

$$u_n < \sum_{k'=1}^{n} \ln(n+k') - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) < u_n + \frac{1}{2n}$$

L'indice k' est un indice « muet » donc on peut l'appeler k

$$u_n < \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) < u_n + \frac{1}{2n}$$

Comme

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k) = \ln(n+n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln(2)$$

Car on ne garde que le dernier terme de la première somme et le premier de la seconde somme. Puis on finit de la même façon.

Allez à : Exercice 40 :

Correction exercice 41 :

On pose $f(x) = e^x - P(x)$, ainsi le problème est de trouver le nombre de solution réelle de $f(x) = 0$

Soit $P_0 = a \in \mathbb{R}^*$ un polynôme de degré 1,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = a$$

Si $a \leq 0$ il n'y a pas de solution et si $a > 0$ alors il y a une solution. Donc $f(x) = 0$ a au plus 1 solution.

Posons (H_n) « $f(x) = 0$ a au plus n solutions où $n = d°P$ »

(H_0) est vraie.

Montrons que (H_n) entraine (H_{n+1})

Soit P_{n+1} un polynôme de degré $n+1$, et supposons que f, définie par $f(x) = e^x - P_{n+1}(x)$ admet au moins $n+2$ solutions que l'on notera $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1}$.

D'après le théorème de Rolle, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \exists c_k \in]a_k, a_{k+1}[, f'(c_k) = 0$$

Ce qui entraine que $f'(x) = 0$ a au moins $n+1$ solutions mais

$$f'(x) = e^x - P'_{n+1}(x)$$

P'_{n+1} est de degré n donc d'après (H_n) $f'(x) = 0$ à au plus n solutions d'où la contradiction, ce qui montre que $f(x) = 0$ a au plus $n+1$ solutions, on a bien montré que $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$ donc

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $n = d°P$ $e^x = P(x)$ a au plus n solutions, et donc un nombre finis de solutions.

Allez à : Exercice 41 :

Correction exercice 42 :

Comme f est dérivable en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}\right) = 0 - \frac{f(0)-1}{0-1} = -\frac{-1}{-1} = -1$$

Comme f est dérivable en 1 et que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)-1}{x-1}\right) = \frac{f(1)}{1} - 0 = \frac{1}{1} = 1$$

Cela montre que g est une fonction continue sur $[0,1]$, on peut alors utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. $g(0) = -1$ et $g(1) = 1$, et $0 \in]-1,1[$ donc il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$g(\alpha) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$$

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \Leftrightarrow (\alpha-1)f(\alpha) = \alpha(f(\alpha)-1) \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) - f(\alpha) = \alpha f(\alpha) - \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$$

Allez à : Exercice 42 :

Correction exercice 43 :

1. $x \to x^3$ et f sont continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ donc φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
$$\varphi'(x) = \big(f(b) - f(a)\big)3x^2 - (b^3 - a^3)f'(x)$$
2.
$$\varphi(a) = \big(f(b) - f(a)\big)a^3 - (b^3 - a^3)f(a) = a^3 f(b) - a^3 f(a) - b^3 f(a) + a^3 f(a)$$
$$= a^3 f(b) - b^3 f(a)$$
$$\varphi(b) = \big(f(b) - f(a)\big)b^3 - (b^3 - a^3)f(b) = b^3 f(b) - b^3 f(a) - b^3 f(b) + a^3 f(b)$$
$$= -b^3 f(a) + a^3 f(b)$$
Donc
$$\varphi(a) = \varphi(b)$$
D'après 1. φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et alors φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a,b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2\big(f(b) - f(a)\big) - (b^3 - a^3)f'(c) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3c^2\big(f(b) - f(a)\big) = (b^3 - a^3)f'(c)$$

Allez à : Exercice 43 :

Correction exercice 44 :

f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis mais la formule à montrer ne correspond pas à la formule habituelle. Comme il y a une exponentielle on peut penser à considérer le logarithme de cette égalité, ce qui est possible parce que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$.
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \ln\big(f(b)\big) - \ln\big(f(a)\big) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}$$
Vu ainsi, cela devient plus clair, on va appliquer la formule des accroissements finis à la fonction g définie par :
$$g(x) = \ln\big(f(x)\big)$$
$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ car f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et que $\forall x \in [a,b], f(x) > 0$, donc il existe $c \in]a,b[$ telle que :
$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c) \qquad (1)$$
Comme
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
(1) équivaut à
$$\ln\big(f(a)\big) - \ln\big(f(b)\big) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

Allez à : Exercice 44 :

Correction exercice 45 :

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}$$
2. Appliquons le théorème des accroissements finis entre 0 et x. f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$ donc les conditions sont réalisées. Il existe $c \in]0,x[$ tel que :
$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \Leftrightarrow f(x) = xf'(c)$$
Donc
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - xf'(c)}{x^2} = \frac{x\big(f'(x) - f'(c)\big)}{x^2} = \frac{f'(x) - f'(c)}{x}$$

Comme $x > 0$ et que f' croissante entraine que $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$, on a

$$g'(x) \geq 0$$

Dons g est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$

Allez à : Exercice 45 :

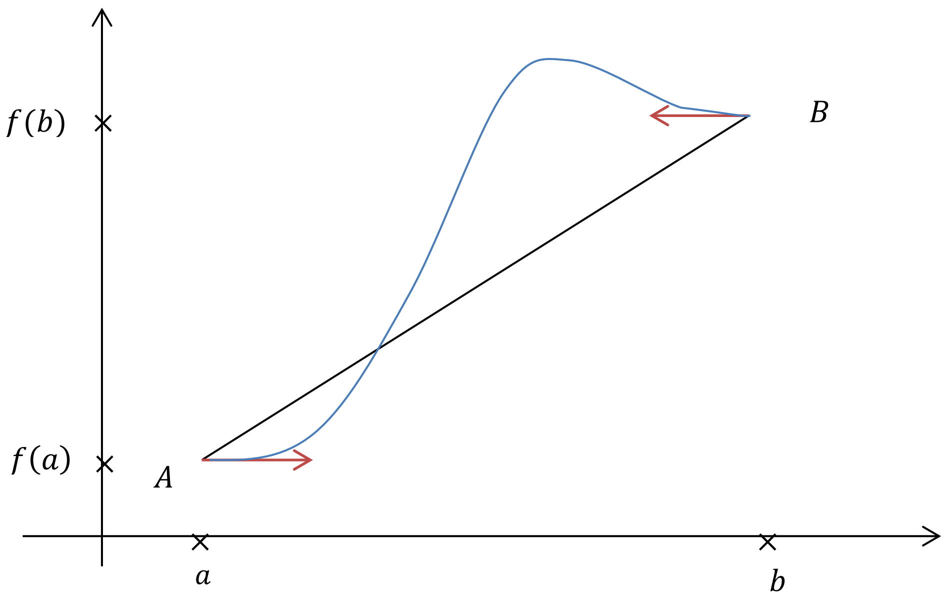
Correction exercice 46 :

Remarque préliminaire

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

Est l'équation de la droite passant par $A = \big(a, f(a)\big)$ et par $B = \big(b, f(b)\big)$, il suffit de remplacer x par a et on trouve que $y = f(a)$, puis de remplacer x par b et on trouve que $y = f(b)$

Donc g mesure la différence entre la droite (AB) et la courbe représentative de f (et ceci entre $x = a$ et $x = b$). Le but des questions est de montrer que lorsque x est proche de a alors la droite est au-dessous de la courbe (donc que $g(x) > 0$) et que lorsque que x est proche de b alors la courbe est au-dessus de la courbe (donc que $g(x) < 0$). Sur le dessin ci-dessous cela paraitra plus clair.



Cette courbe représente le graphe d'une fonction dérivable mais l'énoncé n'impose pas qu'elle le soit, on sait simplement qu'elle est dérivable en a et en b (Et de dérivée nulle).

1.
   i. On va calculer la différence entre les deux valeurs de g.

$$f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\left(f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$
$$=f(x)-f(a)-x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f(x)+f(b)$$
$$+x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=-f(a)+a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}+f(b)-b\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=f(b)-f(a)+(a-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=f(b)-f(a)-(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(b)-f(a)-\big(f(b)-f(a)\big)$$
$$=0$$

Donc

$$g(x)=f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Allez à : Exercice 46 :

ii. Il est clair que $g(a)=0$.

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En prenant la définition de g

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g(b)=f(b)-f(a)-(b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f(b)-f(a)-\big(f(b)-f(a)\big)=0$$

En prenant

$$g(x)=f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=\frac{f(x)-f(b)-(x-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Cela montre que g est dérivable en a et en b et que

$$g'(a)=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\qquad \text{et que}\qquad g'(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Allez à : Exercice 46 :

iii. Comme $b>a$ et $f(b)>f(a)$ on a :

$$\Delta=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$$

Donc $g'(a)<0$ et $g'(b)>0$.

Attention rien ne dit que g est dérivable pour des valeurs plus grandes que a même toutes petites donc en déduire que sur $[a,a+\eta]$ $g'(x)<0$ donc que g est décroissante, et puisque $g(a)=0$ on a $g(x)<0$ est faux.

Reprenons la définition de la limite avec les « ϵ »

$$\lim_{x\to a^+} g'(x) = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\Delta \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x, 0 \le x-a \le \eta$$
$$\Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \Delta\right| \le \epsilon$$
$$\left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \Delta\right| \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \le \frac{g(x)}{x-a} + \Delta \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon - \Delta \le \frac{g(x)}{x-a} \le \epsilon - \Delta$$
$$\Rightarrow g(x) \le (x-a)(\epsilon - \Delta)$$

Car $x-a>0$, il reste à prendre $\epsilon = \frac{\Delta}{2}$, en tous les cas strictement inférieur à Δ pour montrer que pour tout x vérifiant $0 < x-a \le \eta$ c'est-à-dire $a < x \le a+\eta$ on a $g(x) < 0$

$$\lim_{x\to b^-} g'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \Delta \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\eta' > 0, \forall x, 0 \le b-x \le \eta'$$
$$\Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(b)}{x-b} - \Delta\right| \le \epsilon$$
$$\left|\frac{g(x)-g(b)}{x-b} - \Delta\right| \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \le \frac{g(x)}{x-b} - \Delta \le \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon + \Delta \le \frac{g(x)}{x-b} \le \epsilon + \Delta$$
$$\Rightarrow (-\epsilon + \Delta)(x-b) \ge g(x)$$

Car $x-b<0$, il reste à prendre $\epsilon = \frac{\Delta}{2}$, en tous les cas strictement inférieur à Δ pour montrer que pour tout x vérifiant $0 < b-x \le \eta'$ c'est-à-dire $b-\eta' \le x < b$ on a

$$g(x) < \left(-\frac{\Delta}{2} + \Delta\right)(x-b) = \frac{\Delta}{2}(x-b) < 0$$

Car $x < b$.

Allez à : Exercice 46 :

2. Il suffit de prendre $x_1 \in]a, a+\eta[$ et $x_2 \in]b-\eta', b[$ pour avoir $g(x_1) < 0$ et $g(x_2) > 0$, g étant continue sur $[x_1, x_2]$, $g(x)$ prend toutes les valeurs comprise entre $g(x_1)$ et $g(x_2)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, en particulier, il existe $c \in]x_1, x_2[\subset]a, b[$ tel que $g(c) = 0$.

Allez à : Exercice 46 :

3. En prenant la définition de g

$$g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - f(a) - (c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f(c) - f(a) = (c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En prenant $g(x)$ dans le 1. i

$$f(c) - f(b) - (c-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f(c) - f(b) = (c-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On en déduit les deux égalités demandées.

Allez à : Exercice 46 :

Correction exercice 47 :

1. f est continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$ si $h > 0$ (ou continue sur $[a+h, a]$ et dérivable sur $]a+h, a[$ si $h < 0$) donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, a+h]$ si $h > 0$ (ou sur $[a+h, h]$ si $h < 0$), ce qu'il signifie qu'il existe $c \in]a, a+h[$ (ou sur $]a+h, a[$ si $h < 0$). Dans ces deux cas $|c-a| < h$

$$f(a+h) - f(a) = (a+h-a)f'(c) = hf'(c)$$

Donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(c)$$

Allez à : Exercice 47 :

2. f' admet une limite l en a^- si

$$\forall \epsilon>0, \exists \eta>0, \quad a-x\leq \eta \Rightarrow |f'(x)-l|\leq \epsilon$$

Car $|x-a|=-(x-a)=a-x$

On choisit donc $h=\eta$ ainsi

$$|f'(c)-l|\leq \epsilon$$

Ce qui entraine que

$$\forall \epsilon>0, \exists \eta>0, \quad \left|\frac{f(a+\eta)-f(a)}{\eta}-l\right|\leq \epsilon$$

Autrement dit

$$\lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta>0}}\frac{f(a+\eta)-f(a)}{\eta}=l$$

La fonction f étant dérivable en a, cette limite vaut $f'(a)$, par conséquent $f'(a)=l$.

Le raisonnement est identique pour montrer l'autre limite, ou alors on peut considérer la fonction $f_-(x)=-f(-x)$ ce qui équivaut à ce que et ce qui entraine que $f_-'(x)=-\big(-f'(-x)\big)=f'(-x)$

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f_-'(-x)$$

Puis on fait le changement de variable $t=-x$, lorsque $x\to a^+$ alors $t\to -a^-$ par conséquent

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f_-'(-x)=\lim_{t\to -a^-}f_-'(t)=f_-'(-a)$$

D'après la démonstration ci-dessus et donc

$$\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^+}f_-'(-x)=\lim_{t\to -a^-}f_-'(t)=f_-'(-a)=f'(a)$$

Allez à : Exercice 47 :

3. E est non vide et majoré par $g(a)$ car g est croissante donc E admet une borne supérieure m. $g(a)$ est un majorant de E et m est le plus petit des majorant donc

$$m\leq g(a)$$

F est non vide et minorée par $g(a)$ car g est croissante donc F admet une borne inférieure M. $g(a)$ est un minorant de F et M est le plus grand des minorants donc

$$g(a)\leq M$$

Allez à : Exercice 47 :

4. Nous allons utiliser le fait que m est la borne supérieure de E.

Pour tout $\epsilon>0$ il existe $g(t)\in E$ tel que

$$m-\epsilon<g(t)<m$$

Donc, comme g est croissante, pour tout x tel que $t<x<a$, $g(t)<g(x)<g(a)$, m étant la borne supérieure de E, on a $g(t)<g(x)<m$, ce qui entraine que $g(t)-m<g(x)-m<0$

On en déduit que pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta=a-t$ tel que $a-\eta<x<a$ (ce qui équivaut à $t=a-(a-t)<x<a$, on a $g(t)<g(x)<m$, ce qui entraine que

$$m-\epsilon<g(t)<g(x)<m\Rightarrow -\epsilon<g(x)-m<0$$

Ce qui montre bien que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers a^- est m.

Nous allons utiliser le fait que M est la borne supérieure de F.

Pour tout $\epsilon>0$ il existe $g(u)\in F$ tel que

$$M<g(u)<M+\epsilon$$

Donc, comme g est croissante, pour tout y tel que $a<y<u$, $g(a)<g(y)<g(u)$, M étant la borne inférieure de F, on a $M<g(y)<g(u)$, ce qui entraine que $0<g(y)-M<g(u)-M$. On en déduit que pour tout $\epsilon>0$, il existe $\eta=u-a$ tel que $a<y<a+\eta$ (ce qui équivaut à $a<y<a+u-a=u$, on a $M<g(y)<g(u)$, ce qui entraine que

$$M<g(y)<g(u)<M+\epsilon$$

Ce qui montre bien que la limite de $g(y)$ lorsque y tend vers a^+ est M.

Allez à : Exercice 47 :

5. Comme f est dérivable en a, d'après le 2. Il suffit de montrer que $f'(x)$ admet une limite en a^- et en a^+.

   On applique à f' le résultat de 3.
$$m \leq f'(a) \leq M$$
   Où
$$m = \inf\{f'(x), x < a\} \quad \text{et} \quad M = \sup\{f'(y), y > a\}$$
   On a montré au 5.
$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = m \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f'(x) = M$$
   D'après le 2. (puisque $f'(x)$ admet une limite en a^- et a^+
$$\lim_{x \to a^-} f'(x) = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$$
   Ce qui montre que
$$\lim_{x \to a} f'(x) = f'(a)$$
   Autrement dit f' est continue.

Allez à : Exercice 47 :