Formule de Taylor-Lagrange

Exercice 1.

Soit x un réel strictement positif et f une fonction sur $[0, x]$.

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f sur $[0, x]$ à l'ordre 3 (c'est-à-dire avec un reste où intervient la dérivée troisième de f) ? Ecrire cette formule.
2. On pose $f(t) = \ln(1 + t)$. Justifier la possibilité d'écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre 3, et écrire cette formule.

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.
2. Montrer que
$$0 \leq \mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(a)$$
3. En déduire que :
$$\frac{433}{384} \leq \mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{433}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre $a = 4$ et $b = 5$ avec un reste à l'ordre 2.
2. En déduire que $\frac{7}{16}$ une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à $\frac{3}{256}$ près.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 de f entre 16 et 17.
2. En déduire que
$$\frac{8317}{4096} < 17^{\frac{1}{4}} < \frac{65}{32}$$

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ entre 16 et 17 avec un reste à l'ordre 2.
2. Montrer que $\frac{31}{128}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{17}}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 6. (Hors programme)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$:
$$x \leq \mathrm{argth}(x) \leq x + \frac{x^3}{3}\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$$

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 7.

A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 montrer que 10^{-2} est une valeur approchée à 5×10^{-5} près de $\sin(10^{-2})$.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

1. Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n+1$ l'ordre du reste dans la formule.
2. Ecrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, entre 100 et 101 et avec un reste à l'ordre 2.
3. En déduire un nombre décimal qui approche $\frac{1}{\sqrt{101}}$ avec une précision inférieur à 5×10^{-6} près.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

1. Montrer que
$$0 < e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} < \frac{x^3}{6} e^x$$
2. En déduire une valeur approchée de $e^{0,1}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Montrer que pour tout $t \in I =]1, +\infty[$,
$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$
On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange entre 1 et t.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

1. Enoncé le théorème de Taylor-Lagrange.
2. Soit $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(1+t)$.
Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
3. En utilisant Taylor-Lagrange, en déduire l'encadrement de $\ln(2)$ suivant :
$$\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

1. Soit $a > 0$. Démontrer que
$$\left| \cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \right| \leq \frac{a^5}{5!}$$
2. En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Démontrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Démontrer que

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right) \right| \leq \frac{3}{9!}$$

En déduire une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Inégalités de Kolmogorov

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées, et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$$

(M_0 et M_2 sont donc des nombres réels tels que, pour tout x réel, on a $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$. Le but de cet exercice est de prouver que f' est bornée, et de majorer $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ en fonction de M_0 et M_2. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $h > 0$.

1. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f entre x et $x + h$ à l'ordre 2.
2. En déduire l'inégalité :
$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$
En particulier, si on choisit $h = 1$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$$
Ce qui prouve que f' est bornée, avec $M_1 \leq 2M_0 + \frac{M_2}{2}$. On se propose de trouver une meilleure majoration :
3. Etudier la fonction $h \to \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire que $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Indication, on pourra appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et $\frac{1}{2}$, puis entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant la propriété suivante : il existe un polynôme de degré impair tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq |P(x)|$$

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. En déduire que f est identiquement nulle.
3. Le résultat subsiste-t-il si on suppose que P est de degré pair ?

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $\lambda>0$ vérifiant :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0)=0,\forall n\geq 0 \\ \sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right|\leq \lambda^n n! \end{cases}$$

1. Montrer que $f=0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$.
2. Montrer que $f=0$ sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et $f\in C^3([a,b])$.

1. Montrer qu'il existe $c_1\in\left]\frac{a+b}{2},b\right[$ tel que :

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)$$

2. Montrer qu'il existe $c_2\in\left]a,\frac{a+b}{2}\right[$ tel que :

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)$$

3. Montrer qu'il existe $c\in\left]a,b\right[$ tel que :

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

On utilisera bien sur les questions 1. et 2. et on pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f'''.

Allez à : Correction exercice 19

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

1. Si f est de classe C^2 sur $[0,x]$ et de classe C^3 sur $]0,x[$ on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 3.

   Il existe $c\in]0,x[$ tel que :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\frac{x^3}{6}f^{(3)}(c)$$

2. f est $C^{+\infty}$ sur $]-1,+\infty[$ donc sur $[0,x]$, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre.

   $f(0)=0$, $f'(t)=\frac{1}{1+t}\Rightarrow f'(0)=1$, $f''(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}\Rightarrow f''(0)=-1$ et $f^{(3)}(t)=\frac{2}{(1+t)^3}$

   Il existe $c\in]0,x[$.

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\times\frac{2}{(1+c)^3}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1. Les dérivées de ch sont

   $\mathrm{ch}'(t)=\mathrm{sh}(t)$, $\mathrm{ch}''(t)=\mathrm{ch}(t)$, $\mathrm{ch}^{(3)}(t)=\mathrm{sh}(t)$, $\mathrm{ch}^{(4)}(t)=\mathrm{ch}(t)$ et $\mathrm{ch}^{(5)}(t)=\mathrm{sh}(t)$

   ch est une fonction de classe C^5(et même C^∞) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,a]$. Il existe $c\in]0,a[$ tel que :

$$\mathrm{ch}(a)=\mathrm{ch}(0)+\mathrm{sh}(0)\,a+\mathrm{ch}(0)\frac{a^2}{2!}+\mathrm{sh}(0)\frac{a^3}{3!}+\mathrm{ch}(0)\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(c)=1+\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{24}+\frac{a^5}{120}\mathrm{sh}(c)$$

2. D'après la question précédente

$$\operatorname{ch}(a)-1-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{24}=\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)$$

Or sh est une fonction croissante sur $[0,a]$, donc $\operatorname{sh}(0)<\operatorname{sh}(c)<\operatorname{sh}(a)$

Donc, puisque $a>0$:

$$\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(0)<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(c)<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(a)\Leftrightarrow 0<\operatorname{ch}(a)-1-\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{24}<\frac{a^5}{120}\operatorname{sh}(a)$$

On a même des inégalités strictes.

3. On prend $a=\frac{1}{2}$.

$$0<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)-1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}<\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24}=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{384}=\frac{384+48+1}{384}=\frac{433}{384}$$

Et

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{120}=\frac{1}{32\times 120}=\frac{1}{3840}$$

De plus

$$\frac{1}{2}<\ln(2)\Rightarrow \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\operatorname{sh}(\ln(2))=\frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2}=\frac{2-\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}<1$$

Donc

$$\frac{433}{384}<\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{433}{384}+\frac{1}{3840}$$

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. f est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $[4,5]$.

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}};\quad f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}};\quad f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$$

$$f(4)=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2};\qquad f'(4)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{16};$$

Il existe $c\in\,]4,5[$ tel que :

$$f(5)=f(4)+(5-4)f'(4)+\frac{(5-4)^2}{2}f''(c)$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}=\frac{7}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}>\frac{7}{16}$$

$$c>4\Leftrightarrow c^{\frac{5}{2}}>4^{\frac{5}{2}}=2^5=32\Leftrightarrow\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{1}{32}$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{7}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{7}{16}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{32}=\frac{7}{16}+\frac{3}{256}$$

On en déduit les encadrements

$$\frac{7}{16}<\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{7}{16}+\frac{3}{256}$$

Ce qui montre que $\frac{7}{16}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ à $\frac{3}{256}$ près.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

1.

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}}\Rightarrow f(16)=(16)^{\frac{1}{4}}=(2^4)^{\frac{1}{4}}=2$$
$$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Rightarrow f'(16)=\frac{1}{4}\times(2^4)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times 2^{-3}=\frac{1}{32}$$
$$f''(x)=-\frac{3}{16}x^{-\frac{7}{4}}\Rightarrow f''(c)=-\frac{3}{16}c^{-\frac{7}{4}}$$

Il existe $c\in]16,17[$ tel que

$$f(17)=f(16)+f'(16)(17-16)+f''(c)\frac{(17-16)^2}{2!}\Leftrightarrow 17^{\frac{1}{4}}=2+\frac{1}{32}-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}$$

2.

$$16<c<17\Rightarrow 2<c^{\frac{1}{4}}<17^{\frac{1}{4}}\Rightarrow 2^7<c^{\frac{7}{4}}<17^{\frac{7}{4}}\Rightarrow 17^{-\frac{7}{4}}<c^{-\frac{7}{4}}<2^{-7}$$
$$\Rightarrow -\frac{3}{32}2^{-7}<-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<-\frac{3}{32}\times 17^{-\frac{7}{4}}\Rightarrow -\frac{3}{32\times 128}<-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<0$$
$$\Rightarrow 2+\frac{1}{32}-\frac{3}{4096}<2+\frac{1}{32}-\frac{3}{32}c^{-\frac{7}{4}}<2+\frac{1}{32}$$
$$\Rightarrow \frac{8192+128-3}{4096}<17^{\frac{1}{4}}<\frac{65}{32}$$
$$\Rightarrow \frac{8317}{4096}<17^{\frac{1}{4}}<\frac{65}{32}$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. f est C^1 sur $[16,17]$ et deux fois dérivable sur $]16,17[$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange entre 16 et 17. Donc il existe $c\in]16,17[$ tel que :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(16)=\frac{1}{4}$$
$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f'(16)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{16^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^3}=-\frac{1}{128}$$
$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$$
$$f(17)=f(16)+(17-16)f'(16)+(17-16)\frac{f''(c)}{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{128}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}=\frac{32}{4\times 32}-\frac{1}{128}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}=\frac{31}{128}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}$$

2. D'après 1.

$$\frac{1}{\sqrt{17}}>\frac{31}{128}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{31}{128}>0$$

Et

$$c>16\Rightarrow c^{\frac{5}{2}}>16^{\frac{5}{2}}=4^5=1024\Rightarrow\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{1}{1024}\Rightarrow\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^{\frac{5}{2}}}<\frac{3}{8}\times\frac{1}{1024}<\frac{4}{8}\times\frac{1}{1000}=0,5\times 10^{-3}$$
$$=5\times 10^{-4}$$

Ce qui montre que

$$\frac{1}{\sqrt{17}}<\frac{31}{128}+5\times 10^{-4}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{31}{128}<5\times 10^{-4}$$

Finalement

$$-5\times10^{-4}<0<\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{31}{128}<5\times10^{-4}$$

$\frac{31}{128}$ est bien une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{17}}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6. (Hors programme)

argth est une fonction de classe C^2 sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3. Pour $x>0$

$f(t)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{1}{2}\ln(1-t)$, d'où $f(0)=0$

Donc $f'(t)=\frac{1}{2}(1+t)^{-1}+\frac{1}{2}(1-t)^{-1}$, d'où $f'(0)=1$

$f''(t)=-\frac{1}{2}(1+t)^{-2}+\frac{1}{2}(1-t)^{-2}$ d'où $f''(0)=0$

$f^{(3)}(t)=(1+t)^{-3}+(1-t)^{-3}$, d'où

$f^{(3)}(c)=\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{1}{(1-c)^3}=\frac{(1+c)^3+(1-c)^3}{(1-c^2)^3}=\frac{1+3c+3c^2+c^3+1-3c+3c^2-c^3}{(1-c^2)^3}=2\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$

Il existe c dans l'intervalle $]0,x[$ tel que :

$$\operatorname{argth}(x)=x+\frac{x^3}{6}2\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}=x+\frac{x^3}{3}\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}$$

$0<c<x$ donc $0<c^2<x^2$ d'où $1+3c^2<1+3x^2$

Et $0<1-x^2<1-c^2<1$ entraine que $1<\frac{1}{1-c^2}<\frac{1}{1-x^2}$ et que donc $1<\frac{1}{(1-c^2)^3}<\frac{1}{(1-x^2)^3}$

On en déduit que $0<\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}<\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$

On multiplie ces inégalité par $\frac{x^3}{3}>0$, $0<\frac{x^3}{3}\frac{1+3c^2}{(1-c^2)^3}<\frac{x^3}{3}\frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}$, il ne reste qu'à ajouter x à ces inégalités pour conclure.

Si $x=0$ les égalités sont vérifiées trivialement.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 7.

$$f(t)=\sin(t)\Rightarrow f(0)=0$$
$$f'(t)=\cos(t)\Rightarrow f'(0)=1$$
$$f''(t)=-\sin(t)$$

f est C^1 sur $[0,10^{-2}]$ et C^2 sur $]0,10^{-2}[$ car f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il existe $c\in]0,10^{-2}[$

$$\sin(10^{-2})=\sin(0)+(10^{-2}-0)\cos(0)+\frac{(10^{-2}-0)^2}{2}(-\sin(c))\Leftrightarrow\sin(10^{-2})$$
$$=10^{-2}-\frac{10^{-4}}{2}\sin(c)\Leftrightarrow\sin(10^{-2})-10^{-2}=-5\times10^{-5}\sin(c)$$
$$\Rightarrow|\sin(10^{-2})-10^{-2}|=5\times10^{-5}|\sin(c)|\Rightarrow|\sin(10^{-2})-10^{-2}|\le5\times10^{-5}$$

Donc 10^{-2} est une valeur approchée de $\sin(10^{-2})$ à 5×10^{-5}

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Si f est une application de classe C^n sur $[a,b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a,b[$ alors il existe $c\in\,]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$f(t)=t^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow f(100)=\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}$$
$$f'(t)=-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{t\sqrt{t}}\Rightarrow f'(100)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{100\times\sqrt{100}}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1000}=-\frac{1}{2000}$$
$$f''(t)=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)t^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{t^2\sqrt{t}}\Rightarrow f''(c)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$

Il existe $c\in\,]100,101[$
$$\frac{1}{\sqrt{101}}=\frac{1}{10}+(101-100)\times\left(-\frac{1}{2000}\right)+\frac{(101-100)^2}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}=\frac{1}{10}-\frac{1}{2000}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$

3.
$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2000}\right|=\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$
$$100<c<101\Leftrightarrow 100^2\sqrt{100}<c^2\sqrt{c}<101^2\sqrt{101}\Rightarrow 10^5<c^2\sqrt{c}\Rightarrow\frac{1}{c^2\sqrt{c}}<10^{-5}\Rightarrow\frac{3}{8}\times\frac{1}{c^2\sqrt{c}}$$
$$<\frac{3}{8}\times 10^{-5}<5\times\frac{3}{40}\times 10^{-5}<5\times\frac{4}{40}\times 10^{-5}=5\times 10^{-6}$$

Donc
$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}}-\frac{1}{10}+\frac{1}{2000}\right|<5\times 10^{-5}$$

Une valeur approchée à 5×10^{-5} de $\frac{1}{\sqrt{101}}$ est
$$\frac{1}{10}-\frac{1}{2000}=\frac{199}{2000}=0{,}0995$$

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. L'exponentielle est une fonction C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c\in\,]0,x[$ tel que :
$$e^x=e^0+xe^0+\frac{x^2}{2!}e^0+\frac{x^3}{3!}e^c=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^c$$
$$0<e^c<e^x\Rightarrow 0<\frac{x^3}{6}e^c<\frac{x^3}{6}e^x$$
Car l'exponentielle est croissante et que $x>0$, par conséquent
$$1+x+\frac{x^2}{2}<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^c<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^x$$
Ce qui entraine que
$$1+x+\frac{x^2}{2}<e^x<1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}e^x$$
Soit encore
$$0<e^x-1-x-\frac{x^2}{2}<\frac{x^3}{6}e^x$$
2. On pose $x=0{,}1=10^{-1}$
$$0<e^{0,1}-1-\frac{1}{10}-\frac{1}{200}<\frac{10^{-3}}{6}e^{0,1}<\frac{10^{-3}}{6}\times 3=0{,}5\times 10^{-3}=5\times 10^{-4}$$
Donc
$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{200}=1+0{,}1+0{,}005=1{,}105$$
Est une valeur approchée de $e^{0,1}$ à 5×10^{-4} près.

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

La formule de Taylor Lagrange pour la fonction ln entre 1 et $t > 1$ dit qu'il existe $c \in]1, t[$ tel que

$$\ln(t) = \ln(1) + (t-1)\ln'(1) + \frac{(t-1)^2}{2}\ln''(c) \Leftrightarrow \ln(t) = t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2}$$

$$1 < c < t \Leftrightarrow 1 < c^2 < t^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} < \frac{1}{c^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2} < \frac{(t-1)^2}{2c^2} < \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(t-1)^2}{2} < -\frac{(t-1)^2}{2c^2} < -\frac{(t-1)^2}{2t^2} \Leftrightarrow t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2c^2} < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

$$\Leftrightarrow t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2}$$

Comme $t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2t^2} < t - 1$, on a bien

$$t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2} < \ln(t) < t - 1$$

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1. Si f est une application de classe C^n sur $[a, b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

2.

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} = (1+t)^{-1}$$

$$f''(t) = -(1+t)^{-2} = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$f'''(t) = -(-2)(1+t)^{-3} = \frac{2}{(1+t)^3}$$

$$f^{(4)}(t) = 2(-3)(1+t)^{-4} = -\frac{6}{(1+t)^4}$$

Remarque :

Il est très maladroit de dériver ces fonctions comme des quotients et donc d'utiliser la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'$, il est bien préférable de s'apercevoir que ces fonctions sont de la forme u^α et que leur dérivée sont de la forme $\alpha u^{\alpha-1}u'$.

3. On va utiliser la formule avec $a = 0$, $b = 1$ et $n = 3$ (donc le reste est à l'ordre 4)

Il existe $c \in]0,1[$

$$f(1) = f(0) + (1-0)f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}f''(1) + \frac{(1-0)^3}{3!}f'''(0) + \frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(c)$$

$$\ln(2) = \ln(1) + 1 + \frac{1}{2!}\times(-1) + \frac{1}{3!}\times 2 + \frac{1}{4!}\times\left(-\frac{6}{(1+c)^4}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}$$

$$= \frac{6-3+2}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}\times\frac{1}{(1+c)^4}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < 1 + c < 2 \Rightarrow 1 < (1+c)^4 < 2^4 = 16 \Rightarrow \frac{1}{16} < \frac{1}{(1+c)^4} < 1 \Rightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{4(1+c)^4} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} < -\frac{1}{(1+c)^4} < -\frac{1}{64} \Rightarrow \frac{5}{6} - \frac{1}{4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{(1+c)^4} < \frac{5}{6} - \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{10-3}{12} < \ln(2) < \frac{5\times 32}{6\times 32} - \frac{3}{64\times 3} \Rightarrow \frac{7}{12} < \ln(2) < \frac{157}{192}$$

Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. cos est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $a > 0$ avec un reste à l'ordre 5. On pose $f(t) = \cos(t)$

   Il existe $c \in]0, a[$ tel que :
$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2!}f''(0) + \frac{a^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{a^4}{4!}f^{(4)}(0) + \frac{a^5}{5!}f^{(5)}(c)$$
$$f(0) = \cos(0) = 1$$
$$f'(t) = -\sin(t) \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(t) = -\cos(t) \Rightarrow f''(0) = -1$$
$$f^{(3)}(0) = \sin(t) \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$
$$f^{(4)}(t) = \cos(t) \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(t) = -\sin(t)$$
$$\cos(a) = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^5}{5!}\sin(c)$$
   Ce qui entraine que
$$\cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} = -\frac{a^5}{5!}\sin(c)$$
   Maintenant on peut prendre la valeur absolue puis majorer la valeur absolu du sinus par 1.
$$\left|\cos(a) - 1 + \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!}\right| = \left|-\frac{a^5}{5!}\sin(c)\right| = \frac{a^5}{5!}|\sin(c)| \le \frac{a^5}{5!}$$
2. On prend bien sur $a = \frac{1}{2}$
$$\left|\cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!}\right| \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \Leftrightarrow -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!}$$
   Il reste à simplifier les fractions
$$1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4!} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \times 24} = \frac{384 - 48 + 1}{384} = \frac{337}{384}$$
$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5!} = \frac{1}{32 \times 120} = \frac{1}{3840}$$
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \le \cos\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

Soit $x > 0$
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{3}}$$
Pour $t > -1$ cette fonction est C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $x > 0$ avec un reste à l'ordre 3. Il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f^{(3)}(c)$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+t}}=(1+t)^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)(1+t)^{-\frac{4}{3}}\Rightarrow f'(0)=-\frac{1}{3}$$

$$f''(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(1+t)^{-\frac{7}{3}}\Rightarrow f''(0)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$f^{(3)}(t)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+t)^{-\frac{10}{3}}\Rightarrow f^{(3)}(c)=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$=-\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$(1+t)^{-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3}x+\frac{4}{9}\times\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\times\frac{28}{27}(1+c)^{-\frac{10}{3}}=1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}$$

$$0<c<x\Rightarrow 1<1+c<1+x\Rightarrow 1<(1+c)^{\frac{10}{3}}<(1+x)^{\frac{10}{3}}\Rightarrow (1+x)^{-\frac{10}{3}}<(1+c)^{-\frac{10}{3}}<1$$

$$\Rightarrow -\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}>-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+c)^{-\frac{10}{3}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}>\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}>1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}<\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}<1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}<1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

Car

$$-\frac{14x^3}{81}(1+x)^{-\frac{10}{3}}<0$$

Si $x=0$ alors les trois termes de ces inégalités sont nuls et dans ce cas il y a égalité. Pour tout $x\geq 0$

$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81}\leq\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}\leq 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

$f: t\to e^t$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à n'importe quel ordre et sur n'importe quel intervalle, on va l'appliquer entre 0 et $1>0$ avec un reste à l'ordre 9.

Il existe $c\in]0,1[$ tel que :

$$f(1)=f(0)+(1-0)f'(0)+\frac{(1-0)^2}{2!}f''(0)+\frac{(1-0)^3}{3!}f^{(3)}(0)+\frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(0)$$
$$+\frac{(1-0)^5}{5!}f^{(5)}(0)+\frac{(1-0)^6}{6!}f^{(6)}(0)+\frac{(1-0)^7}{7!}f^{(7)}(0)+\frac{(1-0)^8}{8!}f^{(8)}(0)$$
$$+\frac{(1-0)^9}{9!}f^{(9)}(c)$$

Or pour tout $k\geq 0$, $f^{(k)}(t)=e^t$ donc $f^{(k)}(0)=1$, on a donc

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}e^c$$

Ce qui entraine que

$$e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)=\frac{1}{9!}e^c$$

Puis on prend la valeur absolue et on majore e^c par $e^1=e$, puis e par 3

$$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\right)\right|=\left|\frac{1}{9!}e^c\right|=\frac{1}{9!}e^c<\frac{1}{9!}e<\frac{3}{9!}$$

$$\frac{3}{9!}=\frac{3}{2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}=\frac{1}{2\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9}=\frac{1}{2\times 5}\times\frac{1}{4\times 6}\times\frac{1}{7\times 8\times 9}$$
$$<\frac{1}{10}\times\frac{1}{20}\times\frac{1}{7\times 8\times 9}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{100}\times\frac{1}{7\times 8\times 9}=10^{-3}\times\frac{5}{7\times 8\times 9}=10^{-3}\times\frac{5}{504}$$
$$<10^{-3}\times\frac{5}{500}=10^{-3}\times\frac{1}{100}=10^{-5}$$

Par conséquent

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$$

Est une valeur approchée de e à 10^{-5} près.

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2. Il existe $c\in]x,x+h[$ tel que :

$$f(x+h)=f(x)+(x+h-x)f'(x)+\frac{(x+h-x)^2}{2!}f''(c)\Leftrightarrow f(x+h)$$
$$=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(c)$$

2. D'après 1. :

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(c)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{h}\left(f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right)$$
$$\Rightarrow |f'(x)|=\frac{\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|}{h}=\frac{\left|f(x+h)+\left(-f(x)\right)+\left(-\frac{h^2}{2}f''(c)\right)\right|}{h}$$
$$\leq\frac{|f(x+h)|+|-f(x)|+\left|-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|}{h}=\frac{|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(c)|}{h}$$
$$\leq\frac{M_0+M_0+\frac{h^2}{2}M_2}{h}=\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$$

Franchement j'ai fait des chichis parce que l'on peut très bien écrire directement que :

$$\left|f(x+h)-f(x)-\frac{h^2}{2}f''(c)\right|\leq|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(c)|$$

On rappelle l'inégalité triangulaire

$$|A+B+C|\leq|A|+|B|+|C|$$

On rappelle que l'inégalité suivante est en générale très fausse

$$|A-B|\leq|A|-|B|$$

Et puisqu'on est dedans rappelons que

$$\big||A|-|B|\big|\leq|A-B|$$

3. Posons $g(h)=\frac{2M_0}{h}+\frac{hM_2}{2}$, pour $h>0$.

$$g'(h)=-\frac{2M_0}{h^2}+\frac{M_2}{2}=\frac{-4M_0+h^2M_2}{2h^2}=\frac{M_2}{2h^2}\left(h^2-\frac{4M_0}{M_2}\right)=\frac{M_2}{2h^2}\left(h-2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)\left(h+2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\right)$$

Cette dérivée s'annule pour

$$h_0=2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$$

Elle négative pour

$$0 < h < h_0$$

Et positive pour

$$h > h_0$$

Elle admet un minimum en h_0

$$g(h_0) = \frac{2M_0}{h_0} + \frac{h_0 M_2}{2} = \frac{2M_0}{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}} + \frac{2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}M_2}{2} = \sqrt{M_0 M_2} + \sqrt{M_0 M_2} = 2\sqrt{M_0 M_2}$$

On déduit de cela que pour tout h

$$g(h) \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Or $|f'(x)| \leq g(h)$ donc pour tout x

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Par conséquent

$$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$$

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre 0 et $\frac{1}{2}$

Il existe $c_1 \in]0, h[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) f'(0) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 0\right)^2}{2!} f''(c_1)$$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} f''(c_1)$$

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 2 entre $\frac{1}{2}$ et 1

Il existe $c_2 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ tel que :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) f'(1) + \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2}{2!} f''(c_2)$$

On rappelle que la formule « marche » aussi si $b = \frac{1}{2} < a = 1$

Ce qui équivaut à

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{8} f''(c_2)$$

On en déduit que

$$\frac{1}{8} f''(c_1) = 1 + \frac{1}{8} f''(c_2)$$

D'où

$$f''(c_1) - f''(c_2) = 8$$

Si $-4 < f''(c_1) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_1)| < 4$ et $-4 < f''(c_2) < 4 \Leftrightarrow |f''(c_2)| < 4$ alors $-4 < -f(c_2) < 4$ et $-8 < f''(c_1) - f''(c_2) < 8$, l'inégalité de droite contredit $f''(c_1) - f''(c_2) = 8$, par conséquent soit $|f''(c_1)| \geq 4$, soit $|f''(c_2)| \geq 4$, il existe bien une valeur $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geq 4$.

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. P est un polynôme de degré impair donc P admet une racine réelle (c'est une conséquent quasi-évidente du théorème des valeurs intermédiaire puisque les limites en $\pm\infty$ d'un polynôme sont $\pm\infty$ et que les polynômes sont des fonctions continues), appelons a cette racine
$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq |P(a)| = 0$$
2. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre $n+1$, sur $]a,x[$ ou $]x,a[$, selon que $a < x$ ou que $x < a$, intervalle que l'on nomme I, il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$
Donc
$$|f(x)| = \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}|P(c)|$$
L'inégalité vient de l'hypothèse de l'énoncé. Puis comme P est une fonction continue sur un intervalle fermé borné, il existe M tel que pour tout $c \in I$, $|P(x)| \leq M$, par conséquent
$$|f(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$$
Et enfin on fait tendre n vers l'infini, comme M ne dépend pas de n, $\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M$ tend vers 0, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Non, il suffit de prendre une fonction à dérivée bornée comme $f = \cos$, les dérivées successives de cette fonction sont $\pm\cos$ et $\pm\sin$ donc
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$$
1 étant le polynôme constant égal à 1 (il s'agit donc d'un polynôme de degré pair), et pourtant $f \neq 0$.

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. On applique la formule de Taylor-Lagrange, avec reste à l'ordre n, sur $]0,x[$ ou $]x,0[$, selon que $0 < x$ ou que $x < 0$, intervalle que l'on nomme I, il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n+1)}(c) = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)$$
On prend $x \in \left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\lambda}$
$$|f(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c)\right| = \frac{|x|^n}{n!}\left|f^{(n)}(c)\right| \leq \frac{|x|^n}{n!}\sup_{\mathbb{R}}\left|f^{(n)}(x)\right| \leq (\lambda|x|)^n$$
Comme $\lambda|x| \in]0,1[$,
$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda|x|)^n = 0$$
Cela montre que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Comme $f^{(0)} = f$ la première condition entraine que $f(0) = 0$. On aurait peut conclure aussi en invoquant la continuité de f en 0.
2. Soit
$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)$$
$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)$$
C'est évident, il faut quand même noter que la dérivée de g est la dérivée composée de f avec la fonction $x \to x + \frac{1}{2\lambda}$, dont la dérivée est 1, et que donc que $g'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right) \times 1$, les dérivées suivantes s'en déduisent par une récurrence bien évidente.
Reprenons

$$g^{(n)}(0)=f^{(n)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)=0$$

Car $\frac{1}{2\lambda}\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, en utilisant la question 1°) pour g (au lieu de f) $g=0$ sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[$, comme

$$-\frac{1}{\lambda}<x<\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{1}{2\lambda}<x+\frac{1}{2\lambda}<\frac{3}{2\lambda}$$

On en déduit que $f=0$ sur $\left]-\frac{1}{2\lambda},\frac{3}{2\lambda}\right[$, et donc sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{3}{2\lambda}\right[$, ce qui signifie que l'on a « agrandi » l'intervalle où f est nulle de $\frac{1}{2\lambda}$ à droite. Cela doit vous convaincre qu'en recommençant on pourra agrandir l'intervalle autant qu'on le souhaite à droite, et évidemment on peut faire pareil à gauche. Pour cela considérons les fonctions

$$g_p(x)=f\left(x+\frac{p}{2\lambda}\right),p\in\mathbb{N}$$

Et faisons un raisonnement par récurrence

$$H_p:\forall x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+2}{2\lambda}\right[,f(x)=0$$

H_0 est vraie c'est le 1°), H_1, c'est ce que nous venons de montrer.
Montrons que pour $p\geq0$, $H_p\Rightarrow H_{p+1}$
Comme ci-dessus

$$g_{p+1}^{(n)}(x)=f^{(n)}\left(x+\frac{p+1}{2\lambda}\right)$$

Par conséquence

$$g_{p+1}^{(n)}(0)=f^{(n)}\left(\frac{p+1}{2\lambda}\right)=0$$

Car $\frac{p+1}{2\lambda}\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+2}{2\lambda}\right[$ et d'après l'hypothèse de récurrence.
En utilisant le 1°) pour la fonction g_{p+1} au lieu de la fonction f

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[,g_{p+1}(x)=0$$

Ce qui entraine que

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}\right[,f\left(x+\frac{p+1}{2\lambda}\right)=0$$

$$-\frac{1}{\lambda}<x<\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow-\frac{1}{\lambda}+\frac{p+1}{2\lambda}<x+\frac{p+1}{2\lambda}<\frac{1}{\lambda}+\frac{p+1}{2\lambda}\Leftrightarrow\frac{p-1}{2\lambda}<x+\frac{p+1}{2\lambda}<\frac{p+3}{2\lambda}$$

On en déduit que f est nulle sur $\left]\frac{p-1}{2\lambda},\frac{p+3}{2\lambda}\right[$, comme f était déjà nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+2}{2\lambda}\right[$, f est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda},\frac{p+3}{2\lambda}\right[$$

C'est bien la proposition H_{p+1}.
Ceci étant vraie pour tout p on en déduit que f est nulle sur

$$\left]-\frac{1}{\lambda},+\infty\right[$$

Par un raisonnement analogue on en déduit que f est nulle sur $\left]-\infty,\frac{1}{\lambda}\right[$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1.

f est C^2 sur $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ et C^3 sur $\left]\frac{a+b}{2},b\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(b-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_1)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)$$

2. f est C^2 sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ et C^3 sur $\left]a,\frac{a+b}{2}\right[$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(a-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2!}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3!}f'''(c_2)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{a-b}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(a-b)^3}{48}f'''(c_2)$$
$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)$$

3.

$$f(b)-f(a)$$
$$=\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_1)\right)$$
$$-\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{b-a}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{(b-a)^3}{48}f'''(c_2)\right)$$
$$=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{48}\left(f'''(c_1)+f'''(c_2)\right)$$
$$=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\times\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$$

$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est le milieu de $f'''(c_1)$ et de $f'''(c_2)$ donc $\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}$ est compris entre $f'''(c_1)$ et $f'''(c_2)$, autrement dit

Si $f'''(c_1)<f'''(c_2)$

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_1),f'''(c_2)\right[$$

Et si $f'''(c_2)<f'''(c_1)$

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}\in\left]f'''(c_2),f'''(c_1)\right[$$

Comme f''' est continue sur $[a,b]$ donc sur $[c_1,c_2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaire il existe $c\in[c_1,c_2]$ tel que

$$\frac{f'''(c_1)+f'''(c_2)}{2}=f'''(c)$$

Par conséquent

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c)$$

Je n'ai pas traité le cas où $f'''(c_1)=f'''(c_2)$, mais dans ce cas $c=c_1$ ou $c=c_2$ convient de manière évidente.

Allez à : Exercice 19