Fonctions élémentaires

Exercice 1.

Déterminer les limites de x^n lorsque $n \to +\infty$ selon les valeurs de x.

Aller à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Déterminer les limites de $(\ln(x))^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n \to +\infty$

Aller à : Correction exercice 2

Exercice 3.

Résoudre

$$x^y = y^x$$

Lorsque x et y sont des entiers strictement positifs.

Aller à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Déterminer la limite quand x tend vers 0^+ (avec $x \neq 0$) de :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

(On pourra utiliser une variable auxiliaire bien choisie tendant vers $+\infty$).

Aller à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$

1. Déterminer les limites de f à l'infini.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$$

1. Etudier les variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(1 - e^{-x})\, e^x$$

1. Montrer que f et g sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1-e^{-x}} f(x)$.
4. En déduire les variations de g

5. Calculer la limite de g en 0^+, puis calculer la limite de g en $+\infty$ (on pourra poser $X = -e^{-x}$)
6. Tracer le graphe de g.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Pour tout $x > 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire graphiquement ?

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Que peut-on en déduire graphiquement ?
5. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Puis les limites en $\pm\infty$ de $f(x) - x$, en déduire que le graphe de f admet une asymptote en $\pm\infty$.
4. Tracer sommairement le graphe de f.

Aller à : Correction exercice 9

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée de f
3. Quelles sont les variations de f.

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\big(u(x)\big)^\alpha$ où u est un polynôme et α un réel.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Aller à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\beta\big(u(x)\big)^\alpha$ où u est un polynôme et α et β sont des réels.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Aller à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f.

Aller à : Correction exercice 13

Exercice 14.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2\cos(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur $[-\pi, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2}\cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $f'(x_0) = 0$.
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f.

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{3}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f, sa parité et en déduire un intervalle d'étude I.
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variation de f sur I.

On admettra qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ tel que $\cos(x_0) = -\frac{1}{4}$ tel que $\cos(x) \geq -\frac{1}{4}$ si $x \in [0, x_0]$ et $\cos(x) \leq -\frac{1}{4}$ si $x \in [x_0, \pi]$.

Si on connait les fonctions trigonométriques réciproques donner un nom à x_0. (Hors programme)

4. Calculer $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle.
5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Aller à : Correction exercice 16

Corrections

Correction exercice 1.

Si $x < -1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim\limits_{n\to+\infty} |x|^n = +\infty$

Si $x = -1$ alors $x^n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$

Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$

Si $x > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$

Profitons de ce petit exercice pour rappeler les équivalences très importantes suivantes :

$-1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$

Aller à : Exercice 1

Correction exercice 2.

$$-1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Donc

Evidemment $x > 0$.

Si $0 < x \leq \frac{1}{e}$ alors $\ln(x) < -1$ et $(\ln(x))^n$ n'a pas de limite.

Si $\frac{1}{e} < x < e$ alors $-1 < \ln(x) < 1$ et $(\ln(x))^n \to 0$

Si $x = e$ alors $\ln(x) = 1$ et $(\ln(x))^n = 1 \to 1$

Si $x > e$ alors $\ln(x) > 1$ et $(\ln(x))^n \to +\infty$

Aller à : Exercice 2

Correction exercice 3.

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y\ln(x)} = e^{x\ln(y)} \Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Si on pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t}t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Les variations de cette fonction sont résumées dans le tableau ci-dessous

t	0		1		e		$+\infty$
$f'(t)$	$\Vert$		$+$		0	$-$	
$f(t)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

Si $x \leq 1$, il y a une unique solution (x, x).

Si $1 < x < e$, il y a deux couples de solutions (x, x) et (x, y) avec $y > e$.

Si $x = e$, il y a une unique solution (e, e)

Si $x > e$, il y a deux couples de solutions (x, x) et (x, y) avec $y < e$.
Maintenant cherchons les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$:
$x = n = 1$ donne la solution $(1,1)$.
$x = n = 2 \in]1, e[$, on cherche l'unique $y = m > e$ tel que $2^m = m^2$ (s'il existe).
$m = 3$ ne marche pas, $m = 4$ est solution (c'est donc la seule).

Aller à : Exercice 3

Correction exercice 4.

On pose $X = \frac{1}{x}$, si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = X^3 e^{-X^2}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée puisque X^3 tend vers l'infini et e^{-X^2} tend vers 0.
La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances (lors d'une forme indéterminée)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} X^3 e^{-X^2} = 0$$

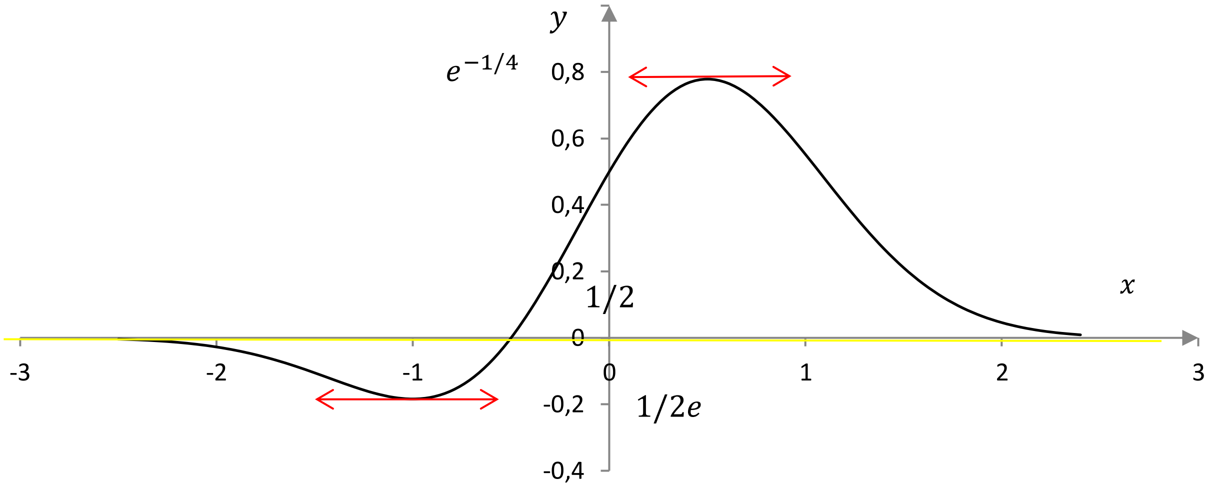
Aller à : Exercice 4

Correction exercice 5.

1. Si $x < 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = -\sqrt{X}$, donc $f(x) = (-\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Si $x > 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, donc $f(x) = (\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.
2. $f'(x) = e^{-x^2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)(-2x)e^{-x^2} = (-2x^2 - x + 1)e^{-x^2}$
Le polynôme $-2X^2 - X + 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racines donc
$-2X^2 - X + 1 = -2(X + 1)(X - \frac{1}{2})$
Donc $f'(x) = -2(x + 1)(x - \frac{1}{2})e^{-x^2}$
On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{2e}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	0

3. $\frac{-1}{2e} \approx -0,2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,8$ en gros.



Aller à : Exercice 5

Correction exercice 6.

1. f est évidemment définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $e^{x-1} = e^x \times e^{-1} = \frac{1}{e}e^x$ on a

$$f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 4 = \frac{1}{e}(2x-1)e^x + 4$$
$$f'(x) = 2e^{x-1} + (2x-1)e^{x-1} = e^{x-1}(2+2x-1) = e^{x-1}(2x+1)$$

Comme $e^{x-1} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x+1$

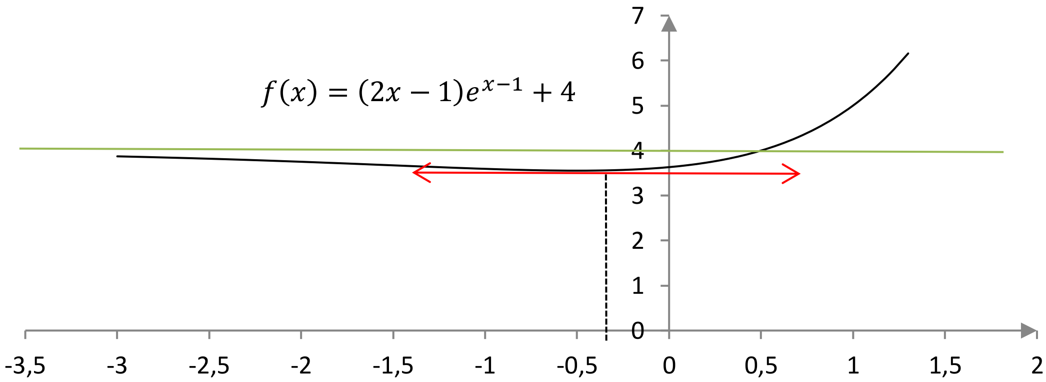
Si $x < -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est négative et f est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$.

Si $x > -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est positive et f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

2. L'exponentielle l'emporte sur les fonction polynômes donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4 \qquad et \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3.



Aller à : Exercice 6

Correction exercice 7.

1.

$$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0$$

Donc f et g sont définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.

$$f'(x) = -e^{-x} + e^{-x}\ln(1-e^{-x}) + (1-e^{-x}) \times \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = -e^{-x} + e^{-x}\ln(1-e^{-x}) + e^{-x}$$
$$= e^{-x}\ln(1-e^{-x})$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(1-e^{-x})$, comme $e^{-x}>0$, on a $1-e^{-x}<0$, donc $\ln(1-e^{-x})<0$, on en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Pour montrer que pour tout $x>0$, $f(x)>0$ il faut et il suffit de montrer que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est positive, comme la limite de e^{-x} en $+\infty$ est nulle, la limite de $f(x)$ est $0+1\times\ln(1)=0$, ce qui achève la démonstration.

3.

$$g'(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\times e^{x}+\ln(1-e^{-x})\,e^{x}=\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}\left(e^{-x}+(1-e^{-x})\ln(1-e^{-x})\right)=\frac{e^{x}}{1-e^{-x}}f(x)$$
$$>0$$

Car $1-e^{-x}>0$ et $f(x)>0$ pour tout $x>0$.

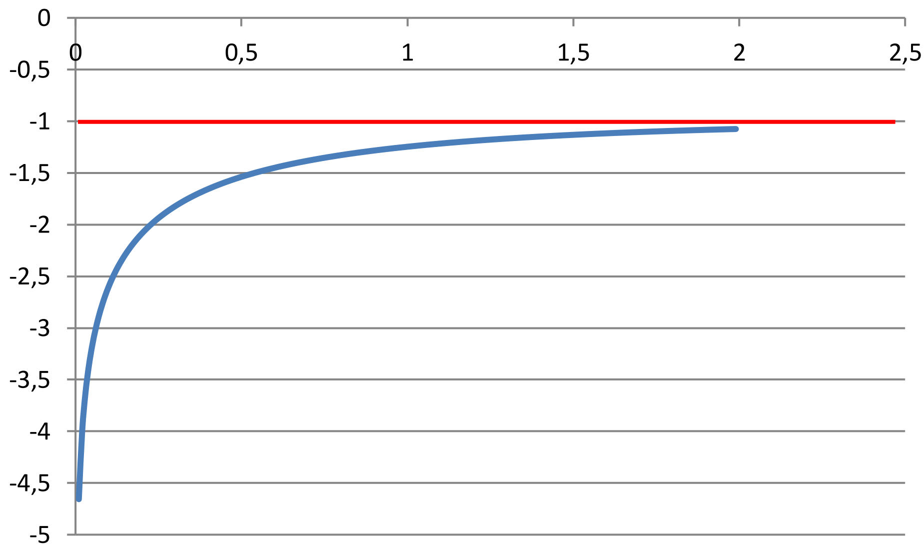
4. Pour tout $x>0$, $g'(x)>0$ donc g est croissante
5.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$$
$$g(x)=\ln(1+X)\times\frac{1}{-X}=-\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)\xrightarrow[X\to 0]{}-1$$

Car

$$\lim_{x\to+\infty}(-e^{-x})=0$$

6.



Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Pour $x>0$ f est continue et dérivable en tant que composée de fonctions continues et dérivables.
En $0*+$

$$\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0=f(0)$$

Donc f est continue en 0^+. Donc sur $\mathbb{R}^+$.

2. f est dérivable en tant que composée de fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

3. On pose $X=\frac{1}{x}\to+\infty$ lorsque $x\to 0^+$, ce qui équivaut à $x=\frac{1}{X}$

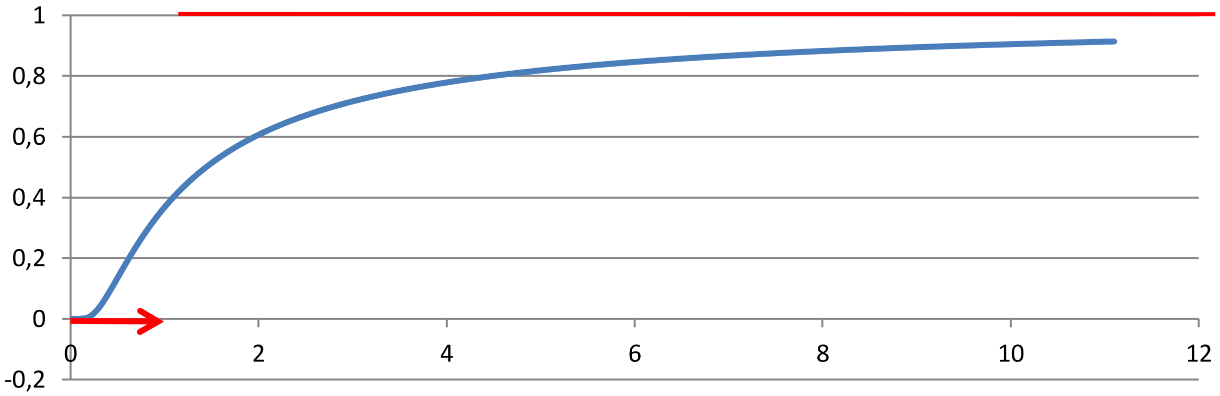
$$f'(x)=X^2e^{-X}$$
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{X\to+\infty}X^2e^{-X}=0$$

Par croissance comparée.
f est continue en 0 et f' admet une limite en 0 donc f est de classe C^1 en 0. En particulier f est dérivable en 0 et admet une demi-tangente horizontale en 0.

4.
$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $+\infty$.

5. Il est clair que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1



Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

1. Si $x \neq 0$ f est la composée et le produit de fonction continue et dérivable, donc f est dérivable.
$$\lim_{x\to0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to0} xe^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$
f est continue en 0.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$
$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. Pour tout $x \neq 0$
La dérivée de $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ est $-(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$,
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x \times \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}(x^2+2) > 0$$
Comme $f'(0) = 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$f(x) - x = xe^{-\frac{1}{x^2}} - x = x\left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \frac{1}{X}\left(e^{-X^2} - 1\right) = \frac{e^{-X^2} - 1}{X - 0}$$

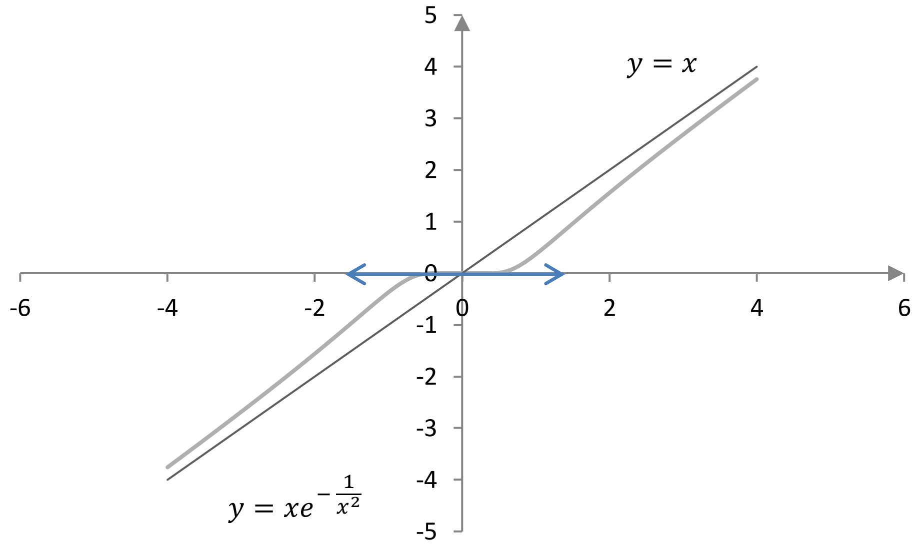
Il s'agit du taux de variation de la fonction $\varphi: X \to e^{-X^2}$ en 0, sa limite est $\varphi'(0)$

$$\varphi'(X) = -2Xe^{-X^2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = \lim_{X\to 0}\frac{e^{-X^2} - 1}{X - 0} = \varphi'(0) = 0$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.

4.



Aller à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.

On cherche les valeurs de x telles que $\frac{1+x}{1-x} > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Par conséquent $D_f =]-1,1[$

2. $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \ln(1 + x) - \ln(1 - x)$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1 - x + 1 + x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

3.

$$\forall x \in]-1,1[, x^2 < 1$$

Donc $1 - x^2 > 0$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ et que la fonction est strictement croissante.

Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \le |x| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \le \sqrt{x^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x < \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 < x + \sqrt{x^2+1}$$

Ce qui montre que f est définie sur $\mathbb{R}$. (et même continue et dérivable sur $\mathbb{R}$).

2. La dérivée de $g: x \to x + \sqrt{x^2+1} = x + (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ est
$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$
C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \to +\infty$ alors $x + \sqrt{x^2+1} \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$
$$x + \sqrt{x^2+1} = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2-(x^2+1)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$$
Si $x \to -\infty$ alors $x - \sqrt{x^2+1} \to -\infty$ et alors
$$\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} \to 0^+$$
Donc
$$f(x) = \ln\left(\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\right) \to -\infty$$

Aller à : Exercice 11

Correction exercice 12.

1. Nécessairement $x^2 \geq 1$, soit $x \leq -1$, soit $x \geq 1$, mais si $x \leq -1$ alors $x - \sqrt{x^2-1} < 0$ donc f n'est pas définie.
Si $x > 1$
$$x^2 - 1 \leq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1} \leq |x| = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2-1} > 0$$
f est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Remarque :
Un raisonnement qui ressemble plus ou moins à çà est faux
$$x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1$$
Il a deux problèmes majeurs, d'abord on oublie que $x^2 - 1$ doit être positif et je rappelle que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ et que si l'on veut qu'il y ait équivalence il faut que a et b soit de même signe. Dans notre exercice $x > \sqrt{x^2-1}$ est évidemment faux pour un $x < 0$.

2. La dérivée de $g: x \to x - \sqrt{x^2-1} = x + (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ est
$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}} = -(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$
C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \to +\infty$ alors $\sqrt{x^2-1} \to +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée
$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

Si $x \to +\infty$ alors $x+\sqrt{x^2-1} \to +\infty$ et alors

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \to 0^+$$

Donc

$$f(x)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) \to -\infty$$

Aller à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1. f est définie (continue et dérivable) sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0,\pi]$, par parité on connaitra les variation de f sur $[0,2\pi]$, puis par périodicité sur $\mathbb{R}$.
2. $$f'(x)=2\cos(x)+2\cos(2x)=2(\cos(x)+2\cos^2(x)-1)=2(2\cos^2(x)+\cos(x)-1)$$
   Le polynôme $2X^2+X-1$ admet $X_1=-1$ et $X_2=\frac{1}{2}$ comme racine donc
   $2X^2+X-1=2(X+1)(X-\frac{1}{2})$, on en déduit que $f'(x)=4(\cos(x)+1)(\cos(x)-\frac{1}{2})$
   Dressons un tableau de signe :

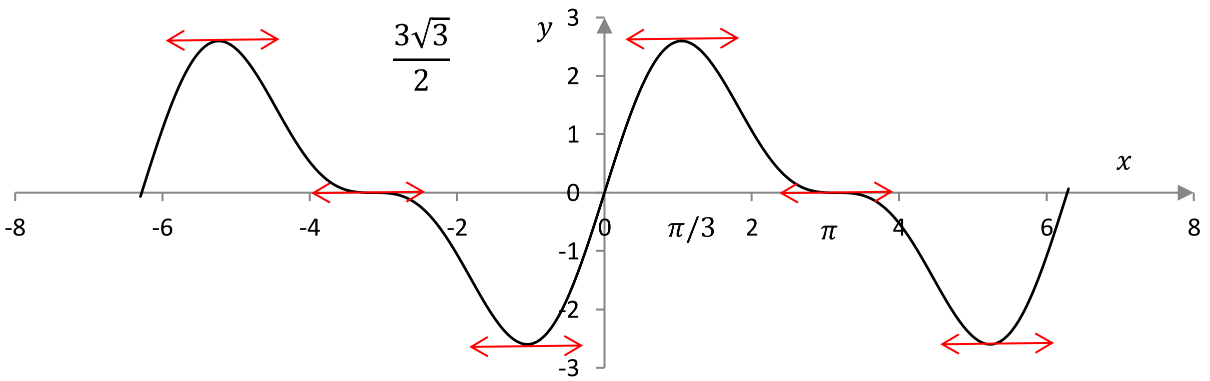
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\cos(x)+1$		$+$		$+$	0
$\cos(x)+\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0

   f est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$.
3. On en déduit le tableau de variation de f.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4°)



Aller à : Exercice 13

Correction exercice 14.

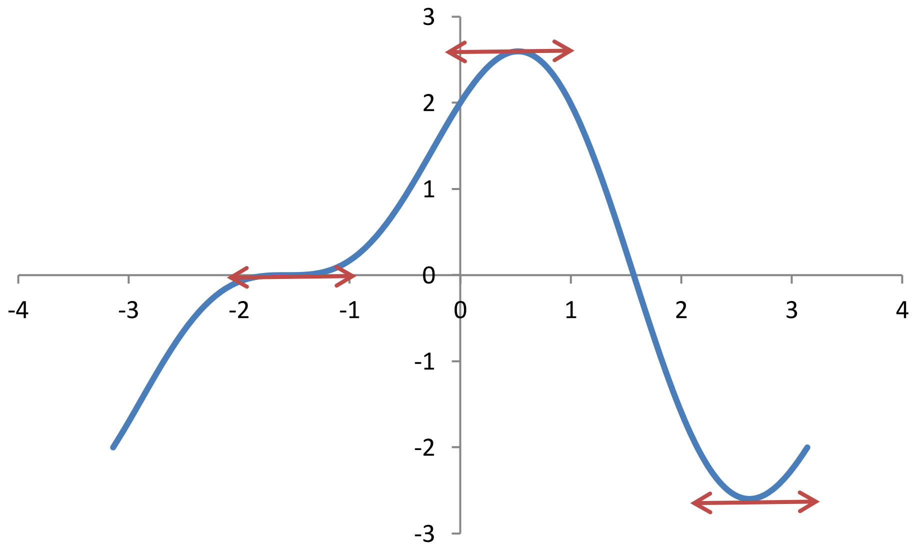
1. f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique mais elle est ni paire ni impaire. On l'étudiera sur $[-\pi,\pi]$.
2. $f'(x) = -2\sin(x) + 2\cos(2x) = -2\sin(x) + 2(1 - 2\sin^2(x)) = -4\left(\sin^2(x) + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\right)$
   Le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ admet -1 et $\frac{1}{2}$ comme racine donc $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} = (X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)$, on en déduit que :
$$f'(x) = -4(\sin(x) + 1)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)$$
$$\begin{cases} \sin(x) + 1 = 0 \\ x \in [-\pi,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$
   Et pour tout $x \in [-\pi,\pi]$ avec $x \neq -\frac{\pi}{2}$, $\sin(x) + 1 > 0$
$$\begin{cases} \sin(x) - \dfrac{1}{2} = 0 \\ x \in [-\pi,\pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$
   Si $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$, $\sin(x) - \frac{1}{2} < 0$
   Si $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$, $\sin(x) - \frac{1}{2} > 0$
   Si $x \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, $\sin(x) < 0$
   On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $[-\pi,\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	-2

4.



Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

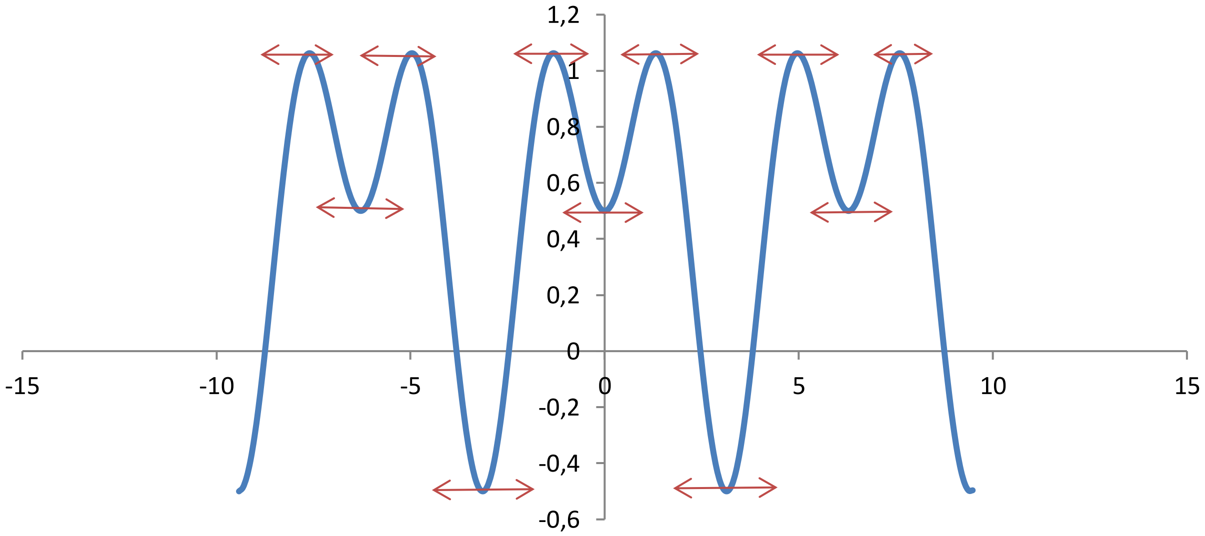
1. f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0,\pi]$
2. On pose $g(x)=\cos(x)-\frac{1}{4}$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}>0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une valeur qui annule g dans $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$. D'autre part $g'(x)=-\sin(x)<0$ sur cet intervalle, donc cette valeur est unique.
3. $f'(x)=2\cos(x)\sin(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=2\sin(x)\left(\cos(x)-\frac{1}{4}\right)$
   $$\forall x\in[0,\pi],\qquad f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sin(x)=0\\ \cos(x)=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$
   Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0,\pi]$, ce sont 0 et π.
   Pour $\in[0,\pi]$ $\cos(x_0)=\frac{1}{4}$.

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)+\frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

   f est croissante sur $[0,x_0]$
   f est décroissante sur $[x_0,\pi]$

4.
$$f(0)=\frac{1}{2}$$
$$f(x_0)=\sin^2(x_0)+\frac{1}{2}\cos(x_0)=1-\cos^2(x_0)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=1-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{16-1+2}{16}=\frac{17}{16}$$
$$f(\pi)=-\frac{1}{2}$$

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{17}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$



Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1.

$$f(x+2\pi)=\frac{1}{3}\cos\big(3(x+2\pi)\big)-\frac{3}{4}\cos\big(2(x+2\pi)\big)=\frac{1}{3}\cos(3x+6\pi)-\frac{3}{4}\cos(2x+4\pi)$$
$$=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est 2π périodique.

$$f(-x)=\frac{1}{3}\cos(-3x)-\frac{3}{4}\cos(-2x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=f(x)$$

f est paire (et 2π périodique) donc on étudie f sur $[0,\pi]$.

2.

$$\cos(3x)+i\sin(3x)=e^{3ix}=\left(e^{ix}\right)^3=(\cos(x)+i\sin(x))^3$$
$$=\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x)$$
$$=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)+i(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))$$

Voir cours pour plus de détails. Puis on égalise les parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos(3x)=\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)\\ \sin(3x)=3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)\end{cases}$$
$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

C'est une formule connue.

3.

$$f'(x)=-\sin(3x)+\frac{3}{2}\sin(2x)=-(3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x))+3\sin(x)\cos(x)$$
$$=\sin(x)\,(-3\cos^2(x)+\sin^2(x)+3\cos(x))$$
$$=\sin(x)\,(-3\cos^2(x)+1-\cos^2(x)+3\cos(x))$$
$$=\sin(x)\,(-4\cos^2(x)+3\cos(x)+1)$$

Soit P le polynôme $P=-4X^2+3X+1$, il admet 1 et $-\frac{1}{4}$ comme racine. On déduit que

$$P=-4(X-1)\left(X+\frac{1}{4}\right)$$

Et que

$$-4\cos^2(x)+3\cos(x)+1=-4(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$$

Et la dérivée vaut

$$f'(x)=-4\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$$

Faisons un tableau de signe pour trouver le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x\in[0,\pi]$

x	0		x_0		π
$\sin(x)$	0	$+$		$+$	0
$\cos(x)-1$	0	$-$		$-$	
$\cos(x)+\frac{1}{4}$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)(\cos(x)-1)\left(\cos(x)+\frac{1}{4}\right)$	0	$-$	0	$+$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0

f est croissante sur $[0,x_0]$ et décroissante sur $[x_0,\pi]$

En fait $x_0=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ (Hors programme), c'est l'unique valeur de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut $-\frac{1}{4}$.

4.

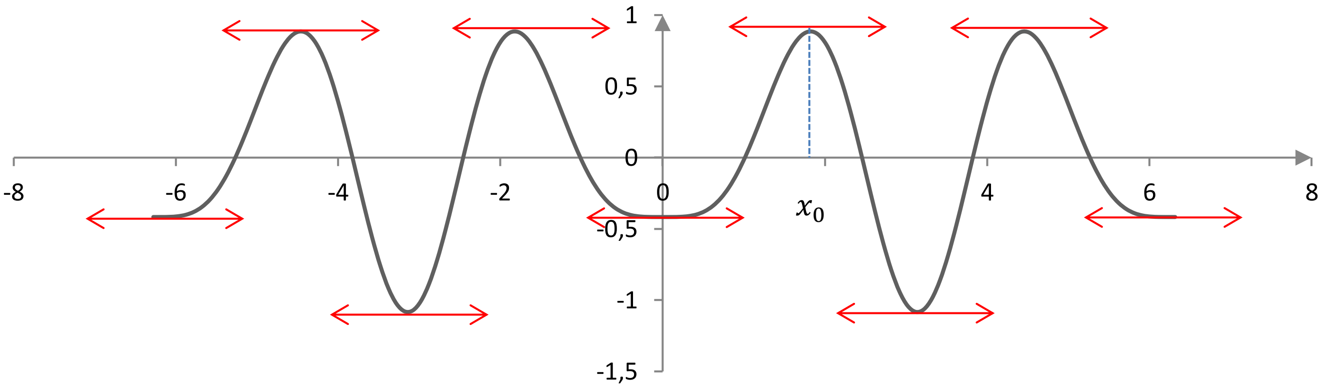
$$f(0)=\frac{1}{3}\cos(0)-\frac{3}{4}\cos(0)=-\frac{5}{12}$$
$$f(\pi)=\frac{1}{3}\cos(3\pi)-\frac{3}{4}\cos(2\pi)=-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{13}{12}$$
$$f(x)=\frac{1}{3}\cos(3x)-\frac{3}{4}\cos(2x)=\frac{1}{3}(\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x))-\frac{3}{4}(2\cos^2(x)-1)$$
$$=\frac{1}{3}(\cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x)))-\frac{3}{4}(2\cos^2(x)-1)$$
$$=\frac{4}{3}\cos^3(x)-\frac{3}{2}\cos^2(x)-\cos(x)+\frac{3}{4}$$

Sachant que $\cos(x_0)=-\frac{1}{4}$

$$f(x_0)=\frac{4}{3}\cos^3(x_0)-\frac{3}{2}\cos^2(x_0)-\cos(x_0)+\frac{3}{4}=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=-\frac{1}{48}-\frac{3}{32}+1$$
$$=\frac{-2-9+96}{96}=\frac{85}{96}$$

5.

x	0		x_0		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{85}{96}$	$\searrow$	$-\frac{13}{12}$



Aller à : Exercice 16