

Fonctions élémentaires

Exercice 1.

Déterminer les limites de x^n lorsque $n \rightarrow +\infty$ selon les valeurs de x .

Aller à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Déterminer les limites de $(\ln(x))^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, lorsque $n \rightarrow +\infty$

Aller à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Résoudre

$$x^y = y^x$$

Lorsque x et y sont des entiers strictement positifs.

Aller à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

Déterminer la limite quand x tend vers 0^+ (avec $x \neq 0$) de :

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$$

(On pourra utiliser une variable auxiliaire bien choisie tendant vers $+\infty$).

Aller à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$

1. Déterminer les limites de f à l'infini.
2. Etudier les variations de f .
3. Tracer la courbe représentative de f .

Aller à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4$$

1. Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3. Tracer sommairement le graphe de f .

Aller à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x}) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1 - e^{-x}) e^x$$

1. Montrer que f et g sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer les variations de f et en déduire que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
3. Montrer que $g'(x) = \frac{e^x}{1 - e^{-x}} f(x)$.
4. En déduire les variations de g

5. Calculer la limite de g en 0^+ , puis calculer la limite de g en $+\infty$ (on pourra poser $X = -e^{-x}$)

6. Tracer le graphe de g .

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

Soit $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^+ .
2. Pour tout $x > 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire graphiquement ?

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Que peut-on en déduire graphiquement ?

5. Dresser le tableau de variation de f et tracer sommairement son graphe.

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur \mathbb{R} .
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f .
3. Calculer les limites de f en $\pm\infty$. Puis les limites en $\pm\infty$ de $f(x) - x$, en déduire que le graphe de f admet une asymptote en $\pm\infty$.
4. Tracer sommairement le graphe de f .

Aller à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée de f
3. Quelles sont les variations de f .

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

1. Vérifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $(u(x))^\alpha$ où u est un polynôme et α un réel.
3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Aller à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

1. Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie et continue.
2. Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\beta(u(x))^\alpha$ où u est un polynôme et α et β sont des réels.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Aller à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f , sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f .

Aller à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 2 \cos(x) + \sin(2x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f , sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son signe sur $[-\pi, \pi]$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Soit f la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2(x) + \frac{1}{2} \cos(x)$$

1. Etudier la parité de f et sa périodicité, en déduire un intervalle d'étude.
2. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $f'(x_0) = 0$.
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer le graphe de f .

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(2x)$$

1. Déterminer la période de f , sa parité et en déduire un intervalle d'étude I .
2. Exprimer $\sin(3x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
3. Etudier les variations de f sur I .

On admettra qu'il existe un unique $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ tel que $\cos(x_0) = -\frac{1}{4}$ tel que $\cos(x) \geq -\frac{1}{4}$ si $x \in [0, x_0]$ et $\cos(x) \leq -\frac{1}{4}$ si $x \in [x_0, \pi]$.

Si on connaît les fonctions trigonométriques réciproques donner un nom à x_0 . (Hors programme)

4. Calculer $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(\pi)$ sous forme rationnelle.

5. Dresser le tableau de variation. Tracer sommairement le graphe de f sur trois périodes.

Aller à : [Correction exercice 16](#)

Corrections

Correction exercice 1.

Si $x < -1$ alors x^n n'a pas de limite mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x|^n = +\infty$

Si $x = -1$ alors $x^n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Si $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$

Si $x = 1$ alors $x^n = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 1$

Si $x > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$

Profitons de ce petit exercice pour rappeler les équivalences très importantes suivantes :

$$-1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$$

Aller à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

$$-1 < \ln(x) < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < e$$

Donc

Evidemment $x > 0$.

Si $0 < x \leq \frac{1}{e}$ alors $\ln(x) < -1$ et $(\ln(x))^n$ n'a pas de limite.

Si $\frac{1}{e} < x < e$ alors $-1 < \ln(x) < 1$ et $(\ln(x))^n \rightarrow 0$

Si $x = e$ alors $\ln(x) = 1$ et $(\ln(x))^n = 1 \rightarrow 1$

Si $x > e$ alors $\ln(x) > 1$ et $(\ln(x))^n \rightarrow +\infty$

Aller à : [Exercice 2](#)

Correction exercice 3.

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y \ln(x)} = e^{x \ln(y)} \Leftrightarrow y \ln(x) = x \ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Si on pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t}t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

Les variations de cette fonction sont résumées dans le tableau ci-dessous

t	0	1	e	$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	0	$\frac{1}{e}$	0

Si $x \leq 1$, il y a une unique solution (x, x) .

Si $1 < x < e$, il y a deux couples de solutions (x, x) et (x, y) avec $y > e$.

Si $x = e$, il y a une unique solution (e, e)

Si $x > e$, il y a deux couples de solutions (x, x) et (x, y) avec $y < e$.

Maintenant cherchons les solutions dans $(\mathbb{N}^*)^2$:

$x = n = 1$ donne la solution $(1,1)$.

$x = n = 2 \in]1, e[$, on cherche l'unique $y = m > e$ tel que $2^m = m^2$ (s'il existe).

$m = 3$ ne marche pas, $m = 4$ est solution (c'est donc la seule).

Aller à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

On pose $X = \frac{1}{x}$, si $x \rightarrow 0^+$ alors $X \rightarrow +\infty$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = X^3 e^{-X^2}$$

Il s'agit d'une forme indéterminée puisque X^3 tend vers l'infini et e^{-X^2} tend vers 0.

La fonction exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances (lors d'une forme indéterminée)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^3 e^{-X^2} = 0$$

Aller à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1. Si $x < 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = -\sqrt{X}$, donc $f(x) = (-\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Si $x > 0$ on pose $x^2 = X \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, donc $f(x) = (\sqrt{X} + \frac{1}{2})e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ceci dit dans ce cas les limites sont presque évidentes.

2. $f'(x) = e^{-x^2} + (x + \frac{1}{2})(-2x)e^{-x^2} = (-2x^2 - x + 1)e^{-x^2}$

Le polynôme $-2X^2 - X + 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racines donc

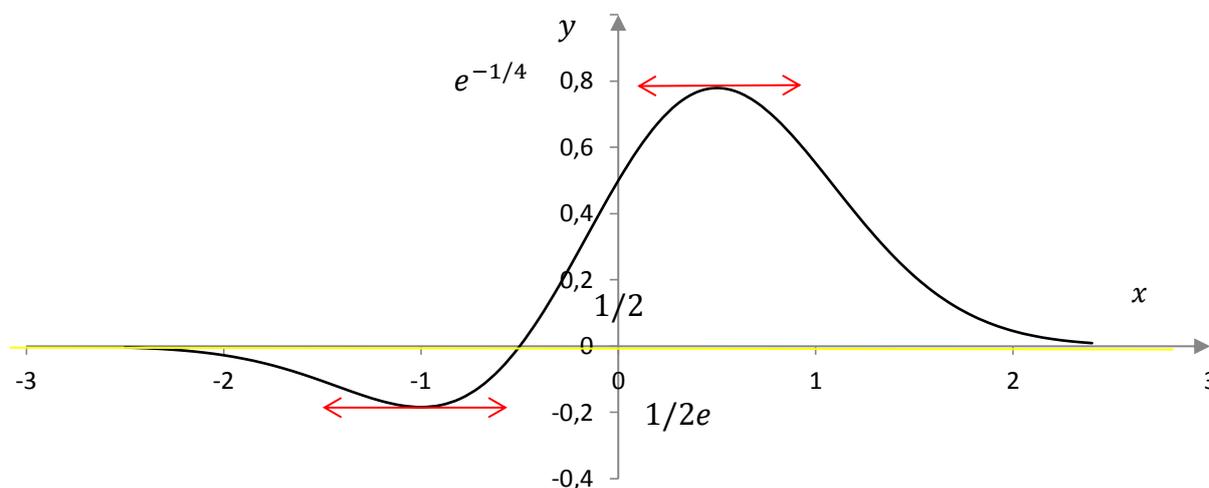
$$-2X^2 - X + 1 = -2(X + 1)(X - \frac{1}{2})$$

$$\text{Donc } f'(x) = -2(x + 1)(x - \frac{1}{2})e^{-x^2}$$

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\frac{-1}{2e}$	$e^{-\frac{1}{4}}$	0	

3. $\frac{-1}{2e} \approx -0,2$ en gros et $e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,8$ en gros.



Aller à : [Exercice 5](#)

Correction exercice 6.

1. f est évidemment définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} . Comme $e^{x-1} = e^x \times e^{-1} = \frac{1}{e}e^x$ on a

$$f(x) = (2x - 1)e^{x-1} + 4 = \frac{1}{e}(2x - 1)e^x + 4$$

$$f'(x) = 2e^{x-1} + (2x - 1)e^{x-1} = e^{x-1}(2 + 2x - 1) = e^{x-1}(2x + 1)$$

Comme $e^{x-1} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x + 1$

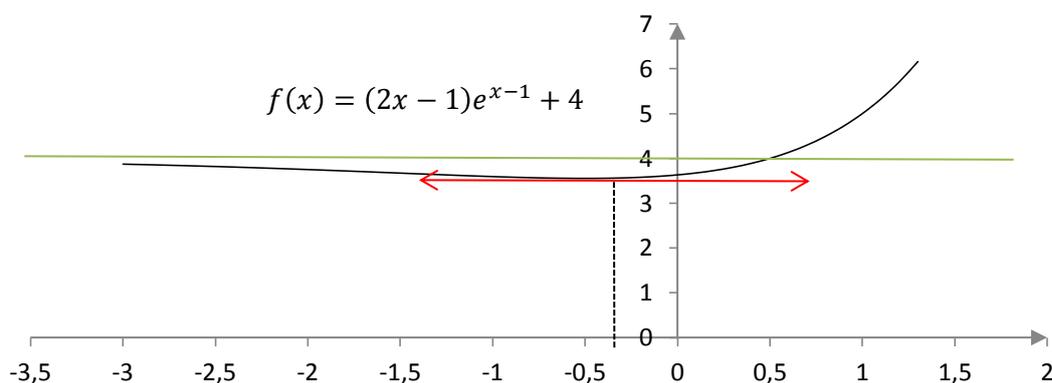
Si $x < -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est négative et f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -\frac{1}{2}[$.

Si $x > -\frac{1}{2}$ alors $f'(x)$ est positive et f est croissante sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. L'exponentielle l'emporte sur les fonction polynômes donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- 3.



Aller à : [Exercice 6](#)

Correction exercice 7.

- 1.

$$x > 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0$$

Donc f et g sont définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

- 2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + e^{-x} \ln(1 - e^{-x}) + (1 - e^{-x}) \times \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -e^{-x} + e^{-x} \ln(1 - e^{-x}) + e^{-x} \\ &= e^{-x} \ln(1 - e^{-x}) \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\ln(1 - e^{-x})$, comme $e^{-x} > 0$, on a $1 - e^{-x} < 1$, donc $\ln(1 - e^{-x}) < 0$, on en déduit que f est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} .

Pour montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ il faut et il suffit de montrer que la limite de $f(x)$ en $+\infty$ est positive, comme la limite de e^{-x} en $+\infty$ est nulle, la limite de $f(x)$ est $0 + 1 \times \ln(1) = 0$, ce qui achève la démonstration.

3.

$$g'(x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \times e^x + \ln(1 - e^{-x}) e^x = \frac{e^x}{1 - e^{-x}} (e^{-x} + (1 - e^{-x}) \ln(1 - e^{-x})) = \frac{e^x}{1 - e^{-x}} f(x) > 0$$

Car $1 - e^{-x} > 0$ et $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

4. Pour tout $x > 0$, $g'(x) > 0$ donc g est croissante

5.

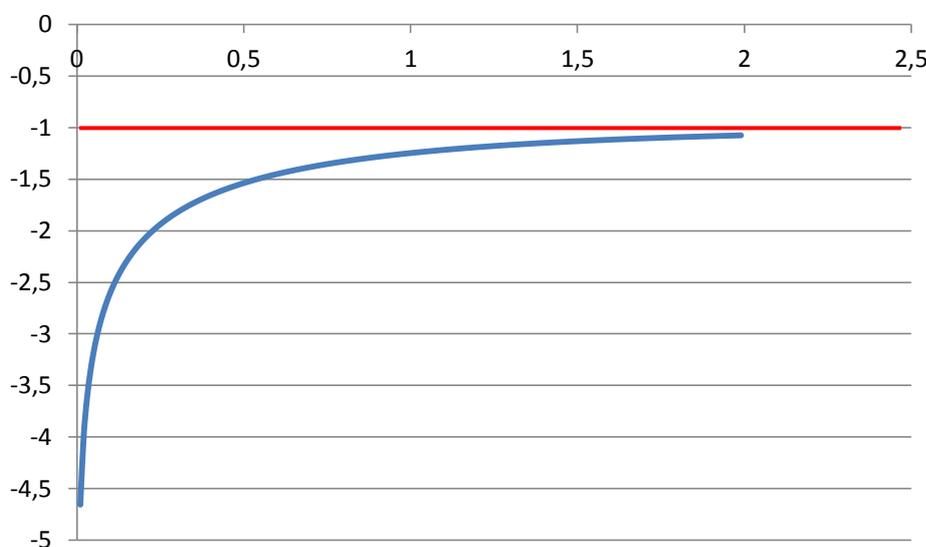
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$g(x) = \ln(1 + X) \times \frac{1}{-X} = -\ln\left(\frac{1+X}{X}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$$

Car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = 0$$

6.



Allez à : [Exercice 7](#)

Correction exercice 8.

1. Pour $x > 0$ f est continue et dérivable en tant que composée de fonctions continues et dérivables.

En $0^+ +$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0^+ . Donc sur \mathbb{R}^+ .

2. f est dérivable en tant que composée de fonction dérivable sur \mathbb{R}^{+*} .

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

3. On pose $X = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, ce qui équivaut à $x = \frac{1}{X}$

$$f'(x) = X^2 e^{-X}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X^2 e^{-X} = 0$$

Par croissance comparée.

f est continue en 0 et f' admet une limite en 0 donc f est de classe C^1 en 0. En particulier f est dérivable en 0 et admet une demi-tangente horizontale en 0.

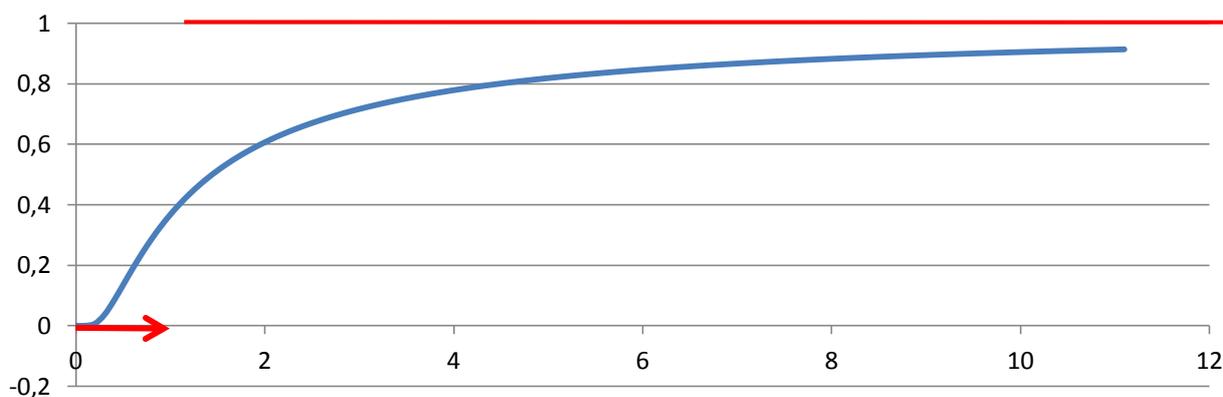
4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote en $+\infty$.

5. Il est clair que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	1



Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1. Si $x \neq 0$ f est la composée et le produit de fonction continue et dérivable, donc f est dérivable.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

f est continue en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. Pour tout $x \neq 0$

La dérivée de $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ est $-(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} + x \times \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} (x^2 + 2) > 0$$

Comme $f'(0) = 0$, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

3.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$f(x) - x = x e^{-\frac{1}{x^2}} - x = x \left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \frac{1}{X} (e^{-X^2} - 1) = \frac{e^{-X^2} - 1}{X - 0}$$

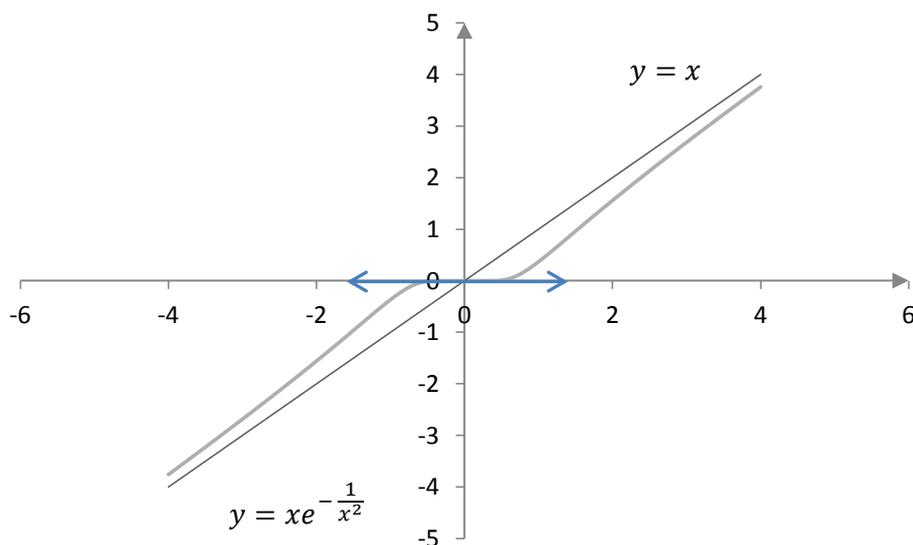
Il s'agit du taux de variation de la fonction $\varphi: X \rightarrow e^{-X^2}$ en 0, sa limite est $\varphi'(0)$

$$\varphi'(X) = -2X e^{-X^2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^{-X^2} - 1}{X - 0} = \varphi'(0) = 0$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe en $\pm\infty$.

4.



Aller à : [Exercice 9](#)

Correction exercice 10.

1.

On cherche les valeurs de x telles que $\frac{1+x}{1-x} > 0$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 - x$	+	+	0	-
$1 + x$	-	0	+	+
$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	-

Par conséquent $D_f =]-1,1[$

2. $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

Donc

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

3.

$$\forall x \in]-1,1[, x^2 < 1$$

Donc $1 - x^2 > 0$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ et que la fonction est strictement croissante.

Aller à : [Exercice 10](#)

Correction exercice 11.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq |x| \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq \sqrt{x^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad -x < \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Ce qui montre que f est définie sur \mathbb{R} . (et même continue et dérivable sur \mathbb{R}).

2. La dérivée de $g: x \rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ est

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \rightarrow +\infty$ alors $x + \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow +\infty$ et $f(x) \rightarrow +\infty$

$$x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}$$

Si $x \rightarrow -\infty$ alors $x - \sqrt{x^2 + 1} \rightarrow -\infty$ et alors

$$\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \rightarrow 0^+$$

Donc

$$f(x) = \ln\left(\frac{-1}{x - \sqrt{x^2 + 1}}\right) \rightarrow -\infty$$

Aller à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

1. Nécessairement $x^2 \geq 1$, soit $x \leq -1$, soit $x \geq 1$, mais si $x \leq -1$ alors $x - \sqrt{x^2 - 1} < 0$ donc f n'est pas définie.

Si $x > 1$

$$x^2 - 1 \leq x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \leq |x| = x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$$

f est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Remarque :

Un raisonnement qui ressemble plus ou moins à ça est faux

$$x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1$$

Il a deux problèmes majeurs, d'abord on oublie que $x^2 - 1$ doit être positif et je rappelle que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ et que si l'on veut qu'il y ait équivalence il faut que a et b soit de même signe. Dans notre exercice

$x > \sqrt{x^2 - 1}$ est évidemment faux pour un $x < 0$.

2. La dérivée de $g: x \rightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = x + (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ est

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}} = -(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

C'est bien la forme que suggérait l'énoncé.

3. Si $x \rightarrow +\infty$ alors $\sqrt{x^2 - 1} \rightarrow +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée

$$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $x + \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow +\infty$ et alors

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow 0^+$$

Donc

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) \rightarrow -\infty$$

Aller à : [Exercice 12](#)

Correction exercice 13.

1. f est définie (continue et dérivable) sur \mathbb{R} , 2π périodique et impaire (ce sont des évidences qu'il n'est pas nécessaire de développer), on étudiera f sur l'intervalle $[0, \pi]$, par parité on connaîtra les variations de f sur $[0, 2\pi]$, puis par périodicité sur \mathbb{R} .

2.

$$f'(x) = 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) = 2(\cos(x) + 2 \cos^2(x) - 1) = 2(2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1)$$

Le polynôme $2X^2 + X - 1$ admet $X_1 = -1$ et $X_2 = \frac{1}{2}$ comme racine donc

$$2X^2 + X - 1 = 2(X + 1)(X - \frac{1}{2}), \text{ on en déduit que } f'(x) = 4(\cos(x) + 1)(\cos(x) - \frac{1}{2})$$

Dressons un tableau de signe :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\cos(x) + 1$	+	+	0
$\cos(x) + \frac{1}{2}$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	- 0

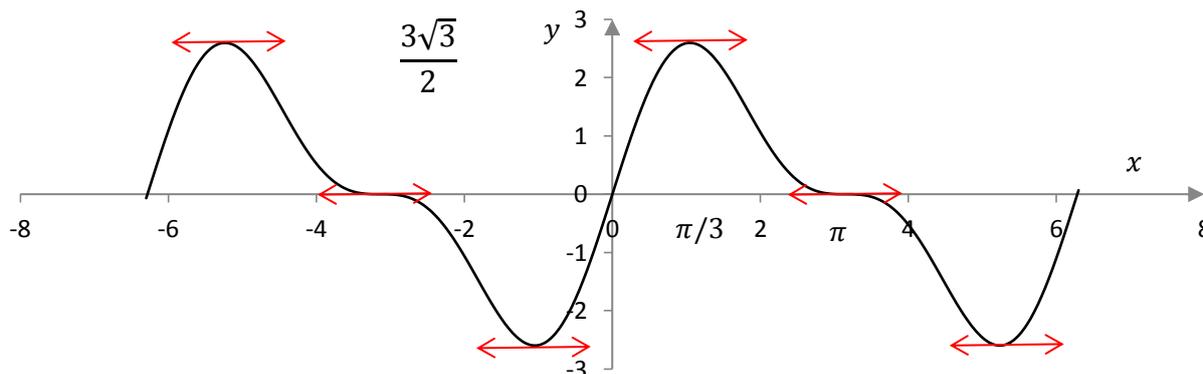
f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

3. On en déduit le tableau de variation de f .

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	- 0
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

4°)



Aller à : [Exercice 13](#)

Correction exercice 14.

- f est définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique mais elle est ni paire ni impaire. On l'étudiera sur $[-\pi, \pi]$.
- $f'(x) = -2 \sin(x) + 2 \cos(2x) = -2 \sin(x) + 2(1 - 2 \sin^2(x)) = -4 \left(\sin^2(x) + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \right)$
Le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ admet -1 et $\frac{1}{2}$ comme racine donc $X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} = (X + 1) \left(X - \frac{1}{2} \right)$, on en déduit que :

$$f'(x) = -4(\sin(x) + 1) \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \sin(x) + 1 = 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}$$

Et pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ avec $x \neq -\frac{\pi}{2}$, $\sin(x) + 1 > 0$

$$\begin{cases} \sin(x) - \frac{1}{2} = 0 \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

Si $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$, $\sin(x) - \frac{1}{2} < 0$

Si $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$, $\sin(x) - \frac{1}{2} > 0$

Si $x \in \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, $\sin(x) < 0$

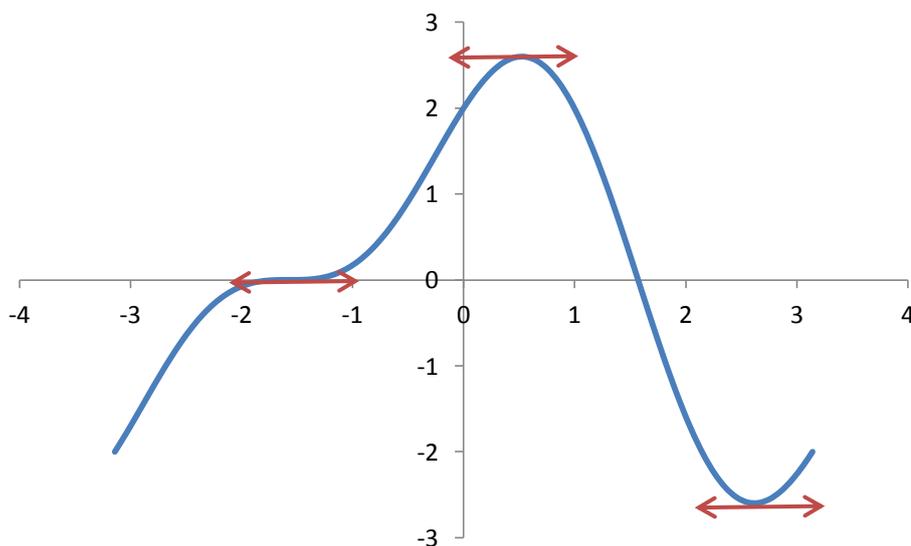
On en déduit le signe de $f'(x)$ sur $[-\pi, \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	
$f'(x)$		+	0	+	0	+

3.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	
$f'(x)$		+	0	+	0	+
$f(x)$	-2	0	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-2	

4.



Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

- f est paire et 2π périodique, on étudie f sur $[0, \pi]$
- On pose $g(x) = \cos(x) - \frac{1}{4}$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} > 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une valeur qui annule g dans $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$. D'autre part $g'(x) = -\sin(x) < 0$ sur cet intervalle, donc cette valeur est unique.
- $f'(x) = 2 \cos(x) \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(x) = 2 \sin(x) \left(\cos(x) - \frac{1}{4}\right)$
$$\forall x \in [0, \pi], \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \cos(x) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il y a deux valeurs qui annulent $\sin(x)$ dans $[0, \pi]$, ce sont 0 et π .Pour $x \in [0, \pi]$ $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$.

x	0	x_0	π
$\sin(x)$	0	+	+ 0
$\cos(x) + \frac{1}{4}$		+	0 -
$f'(x)$	0	+	0 - 0

 f est croissante sur $[0, x_0]$ f est décroissante sur $[x_0, \pi]$

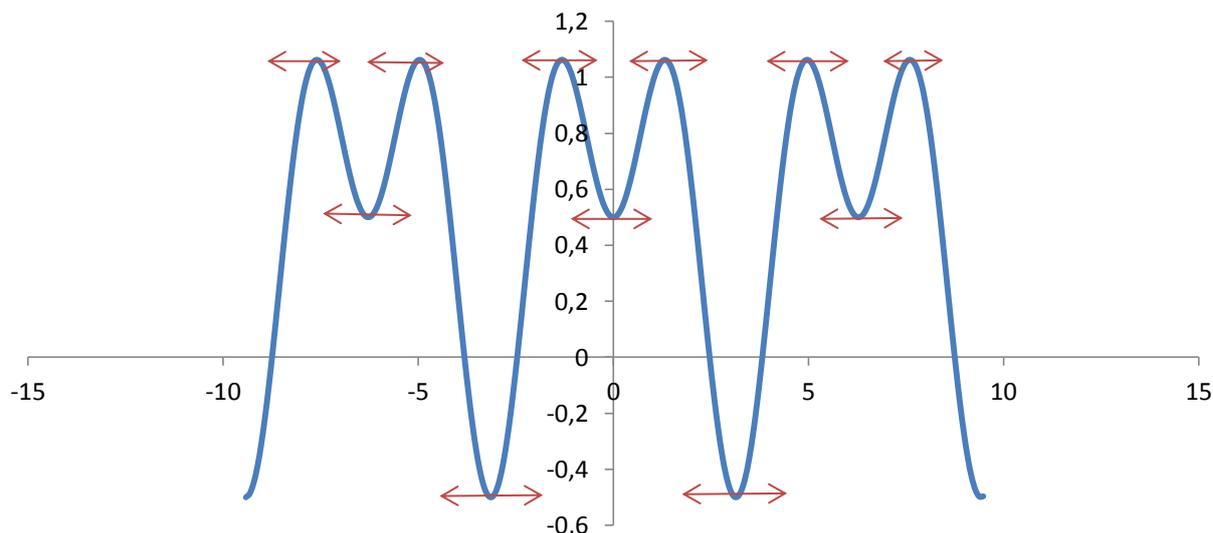
4.

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_0) = \sin^2(x_0) + \frac{1}{2} \cos(x_0) = 1 - \cos^2(x_0) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{16 - 1 + 2}{16} = \frac{17}{16}$$

$$f(\pi) = -\frac{1}{2}$$

x	0	x_0	π
$f'(x)$	0	+	0 - 0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{16}$	$-\frac{1}{2}$



Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1.

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \frac{1}{3} \cos(3(x + 2\pi)) - \frac{3}{4} \cos(2(x + 2\pi)) = \frac{1}{3} \cos(3x + 6\pi) - \frac{3}{4} \cos(2x + 4\pi) \\ &= \frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(2x) = f(x) \end{aligned}$$

 f est 2π périodique.

$$f(-x) = \frac{1}{3} \cos(-3x) - \frac{3}{4} \cos(-2x) = \frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(2x) = f(x)$$

 f est paire (et 2π périodique) donc on étudie f sur $[0, \pi]$.

2.

$$\begin{aligned} \cos(3x) + i \sin(3x) &= e^{3ix} = (e^{ix})^3 = (\cos(x) + i \sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i \cos^2(x) \sin(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) - i \sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) + i(3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x)) \end{aligned}$$

Voir cours pour plus de détails. Puis on égalise les parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases} \cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) \\ \sin(3x) = 3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x) \\ \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \end{cases}$$

C'est une formule connue.

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(3x) + \frac{3}{2} \sin(2x) = -(3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x)) + 3 \sin(x) \cos(x) \\ &= \sin(x) (-3 \cos^2(x) + \sin^2(x) + 3 \cos(x)) \\ &= \sin(x) (-3 \cos^2(x) + 1 - \cos^2(x) + 3 \cos(x)) \\ &= \sin(x) (-4 \cos^2(x) + 3 \cos(x) + 1) \end{aligned}$$

Soit P le polynôme $P = -4X^2 + 3X + 1$, il admet 1 et $-\frac{1}{4}$ comme racine. On déduit que

$$P = -4(X - 1) \left(X + \frac{1}{4} \right)$$

Et que

$$-4 \cos^2(x) + 3 \cos(x) + 1 = -4(\cos(x) - 1) \left(\cos(x) + \frac{1}{4} \right)$$

Et la dérivée vaut

$$f'(x) = -4 \sin(x) (\cos(x) - 1) \left(\cos(x) + \frac{1}{4} \right)$$

Faisons un tableau de signe pour trouver le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x \in [0, \pi]$

x	0	x_0	π		
$\sin(x)$	0	+	+	0	
$\cos(x) - 1$	0	-	-		
$\cos(x) + \frac{1}{4}$		+	0	-	
$\sin(x)(\cos(x) - 1) \left(\cos(x) + \frac{1}{4} \right)$	0	-	0	+	0
$f'(x)$	0	+	0	-	0

 f est croissante sur $[0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, \pi]$ En fait $x_0 = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ (Hors programme), c'est l'unique valeur de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut $-\frac{1}{4}$.

4.

$$f(0) = \frac{1}{3} \cos(0) - \frac{3}{4} \cos(0) = -\frac{5}{12}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{3} \cos(3\pi) - \frac{3}{4} \cos(2\pi) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$$

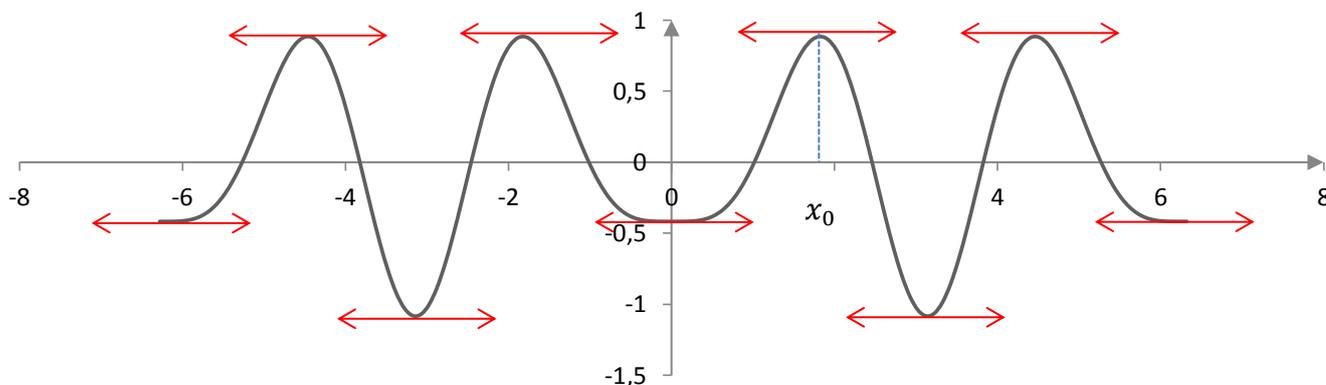
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(2x) = \frac{1}{3} (\cos^3(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x)) - \frac{3}{4} (2 \cos^2(x) - 1) \\ &= \frac{1}{3} (\cos^3(x) - 3 \cos(x) (1 - \cos^2(x))) - \frac{3}{4} (2 \cos^2(x) - 1) \\ &= \frac{4}{3} \cos^3(x) - \frac{3}{2} \cos^2(x) - \cos(x) + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sachant que $\cos(x_0) = -\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{4}{3} \cos^3(x_0) - \frac{3}{2} \cos^2(x_0) - \cos(x_0) + \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{48} - \frac{3}{32} + 1 \\ &= \frac{-2 - 9 + 96}{96} = \frac{85}{96} \end{aligned}$$

5.

x	0	x_0	π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$-\frac{5}{12}$	$\frac{85}{96}$	$-\frac{13}{12}$



Aller à : [Exercice 16](#)