Espaces vectoriels

Exercice 1.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (4,1,4)$ et $v_3 = (2,-1,4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Allez à : Correction exercice 1

Exercice 2.

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,2,2)$ et $v_3 = (3,7,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ et $v_3 = (1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $v_1 = (1,2,1,2,1)$, $v_2 = (2,1,2,1,2)$, $v_3 = (1,0,1,1,0)$ et $v_4 = (0,1,0,0,1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $v_1 = (2,4,3,-1,-2,1)$, $v_2 = (1,1,2,1,3,1)$ et $v_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $v_1 = (2,1,3,-1,-4,-1)$, $v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3)$ et $v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

Allez à : Correction exercice 2

Exercice 3.

On considère dans $\mathbb{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants (e_1, e_2, e_3, e_4)
Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(e_1, 2e_2, e_3)$.
2. (e_1, e_3).
3. $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$.
4. $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$.
5. $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$.

Allez à : Correction exercice 3

Exercice 4.

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u_1 = (1,2,3,4)$ et $u_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect(u_1, u_2)$? Et pour que $(x, 1,1, y) \in Vect(u_1, u_2)$?

Allez à : Correction exercice 4

Exercice 5.

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Allez à : Correction exercice 5

Exercice 6.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

Allez à : Correction exercice 6

Exercice 7.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$
À quelle(s) condition(s) un vecteur $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ appartient-il au sous-espace engendré par les vecteurs ? Définir ce sous-espace par une ou des équations.

Allez à : Correction exercice 7

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et x, y, z et t une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(x, 2y, z)$

2. (x,z)
3. $(x,x+2,t)$
4. $(3x+z,z,y+z)$.
5. $(2x+y,x-3y,t,y-x)$

Allez à : Correction exercice 8

Exercice 9.

Dans $\mathbb{R}^4$, comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = Vect((1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,5))$$
$$G = Vect\big((-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\big)$$

Allez à : Correction exercice 9

Exercice 10.

On suppose que $v_1, v_2,\ldots,v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs v_1-v_2, v_2-v_3, $v_3-v_4,\ldots$, $v_{n-1}-v_n$, v_n-v_1 sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs v_1+v_2, v_2+v_3, $v_3+v_4,\ldots$, $v_{n-1}+v_n$, v_n+v_1sont-ils linéairement indépendants?
3. Les vecteurs v_1, v_1+v_2, $v_1+v_2+v_3$, $v_1+v_2+v_3+v_4,\ldots$, $v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}+v_n$, v_n+v_1 sont-ils linéairement indépendants?

Allez à : Correction exercice 10

Exercice 11.

Soient $a=(2,3,-1)$, $b=(1,-1,-2)$, $c=(3,7,0)$ et $d=(5,0,-7)$.

Soient $E=Vect(a,b)$ et $F=Vect(c,d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E=F$

Allez à : Correction exercice 11

Exercice 12.

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v=(-2,x,y,3)$ appartienne au sous-espace-vectoriel engendré par le système (u_1,u_2), où $u_1=(1,-1,1,2)$ et $u_2=(-1,2,3,1)$

Allez à : Correction exercice 12

Exercice 13.

Soient $u_1=(0,1,-2,1)$, $u_2=(1,0,2,-1)$, $u_3=(3,2,2,-1)$, $u_4=(0,0,1,0)$ et $u_5=(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier votre réponse.

1. $Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$
2. $(1,1,0,0)\in Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)$.
3. $\dim\big(Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)\big)=1$.
4. $Vect(u_1,u_2)+Vect(u_2,u_3,u_4)=\mathbb{R}^4$.
5. $Vect(u_4,u_5)$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect(u_1,u_2,u_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 13

Exercice 14.

On considère les vecteurs $v_1=(1,0,0,1)$, $v_2=(0,0,1,0)$, $v_3=(0,1,0,0)$, $v_4=(0,0,0,1)$ et $v_5=(0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $Vect(v_1,v_2)$ et $Vect(v_3)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $Vect(v_1,v_3,v_4)$ et $Vect(v_2,v_5)$.
3. Même question pour $Vect(v_1,v_2)$ et $Vect(v_3,v_4,v_5)$

Allez à : Correction exercice 14

Exercice 15.

1. Est-ce que le sous-ensemble $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Est-ce que le sous-ensemble $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, y^2=2x, z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Allez à : Correction exercice 15

Exercice 16.

Soient $u_1=(1,-1,2)$, $u_2=(1,1,-1)$ et $u_3=(-1,-5,-7)$

Soit $E=Vect(u_1,u_2,u_3)$

Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$

1. Donner une base de E.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner une base de F.
4. Donner une base de $E\cap F$.

Allez à : Correction exercice 16

Exercice 17.

Soient $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(2,-2,-1)$ et $u_3=(1,1,-1)$

Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, y+z=0\}$ et $F=Vect(u_1,u_2)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E.
2. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3\in F$?
3. Est-ce que $u_3\in E$?
4. Donner une base de $E\cap F$.
5. Soit $u_4=(-1,7,5)$, est-ce que $u_4\in E$? est-ce que $u_4\in F$?

Allez à : Correction exercice 17

Exercice 18.

Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$

Soient $a=(1,-2,3)$ et $b=(2,1,-1)$ deux vecteurs. On pose $F=Vect(a,b)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $E\cap F$.
3. A-t-on $E\oplus F$?

Allez à : Correction exercice 18

Exercice 19.

Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-2z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x+y-z=0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a=(1,1,1)$, $b=(1,0,1)$ et $c=(0,1,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b,c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a,b,c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.
6. Soit $u=(x,y,z)$, exprimer u dans la base $\{a,b,c\}$.

Allez à : Correction exercice 19

Exercice 20.

Soient $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} | 2x+y-z=0 \text{ et } x+2y+z=0\}$ et $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | 2x-3y+z=0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a=(1,-1,1)$, $b=(-2,-1,1)$ et $c=(-1,0,2)$

1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2°) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.

3°) Montrer que $\{b,c\}$ est une base de F.

4°) Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5°) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6°) Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Allez à : Correction exercice 20

Exercice 21.

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1,0,1)$, $b = (1,1,1)$ et $c = (0,2,1)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Allez à : Correction exercice 21

Exercice 22.

Soient $E = Vect(a, b, c, d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$a = (2, -1, -1); \quad b = (-1,2,3); \quad c = (1,4,7); \quad d = (1,1,2)$$

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a, b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter une base de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Allez à : Correction exercice 22

Exercice 23.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0 \text{ et } x - 2y + 2z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$

On admettra que E est un espace vectoriel.

Et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x + 6y + 7z - t = 0\}$

Soient $a = (2,1,-1,2)$, $b = (1,1,-1,1)$, $c = (-1,-2,3,7)$ et $d = (4,4,-5,-3)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Première partie

1. Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.
2. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième partie

3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. Déterminer une base de F.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Troisième partie

6. Montrer que $F = Vect(b, c, d)$.
7. Soit $u = (x, y, z, t) \in F$, exprimer u comme une combinaison linéaire de b, c et d.

Allez à : Correction exercice 23

Exercice 24.

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0, x + 2y - z + t = 0, -x - y + 2z + 2t = 0\}$ et

$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 3y + 4t = 0\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

3. Soit $a = (1,3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = Vect(a)$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 24

Exercice 25.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = Vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

   On justifiera la réponse.

Allez à : Correction exercice 25

Exercice 26.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_3 = 0 \ \text{ et } \ x_2 + x_4 = 0\}$

Soient $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,0)$

Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$

On admettra que E est un espace vectoriel.

1. Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2. Déterminer une base de F.
3. Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4. Donner une famille génératrice de $E + F$.
5. Montrer que : $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 26

Exercice 27.

Soient $a = (1,1,1,1)$ et $b = (1,-1,1,-1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Soit $E = Vect(a, b)$.

Soient

$$F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = 0\}$$
$$F_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_2 + x_4 = 0 \ \text{ et } \ x_1 + x_3 = 0\}$$

On admettra que E, F_1 et F_2 sont trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base (c, d) de F_1.
2. Déterminer une base (e, f) de F_2
3. A-t-on $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. A-t-on $E \oplus F_1 = \mathbb{R}^4$?

Allez à : Correction exercice 27

Exercice 28.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z - t = 0\}$, $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$ et $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, z = 3x, t = 4x\}$

1. Montrer que E, F et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels.
2. Déterminer $E + F$.
3. Montrer que $E \oplus H = \mathbb{R}^4$

Allez à : Correction exercice 28

Exercice 29.

Soient $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (1,-1,-2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une sous famille de (u_1, u_2, u_3, u_4) libre qui engendre $E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$, en déduire la dimension de E.

Allez à : Correction exercice 29

Exercice 30.

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_3 - x_4 = 0\}$

On admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une base de E.
2. Compléter cette base de E en une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Correction exercice 30

Exercice 31.

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que : $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

Allez à : Correction exercice 31

Exercice 32.

Soient $P_1 = X^3 + X^2 + X + 1$, $P_2 = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $P_3 = 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ et $P_4 = 10X^3 + 4X^2 + 13X + 7$ quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$

1. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre ?
2. Donner une base de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$

Allez à : Correction exercice 32

Exercice 33.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Allez à : Correction exercice 33

Exercice 34.

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

Allez à : Correction exercice 34

Exercice 35.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les trois fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$, sont-elles linéairement indépendantes?

Allez à : Correction exercice 35

Exercice 36.

Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer $Vect(f, g, h)$.

Allez à : Correction exercice 36

Exercice 37.

Soit E l'ensemble des fonctions vérifiant l'équation différentielle

$$y'' + xy' - x^2y = 0$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

Allez à : Correction exercice 37

Exercice 38. (Hors programme)

1. Montrer que les systèmes : $S_1 = (1, \sqrt{2})$ et $S_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ sont libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Soient, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $u_1 = (3 + \sqrt{5}, 2 + 3\sqrt{5})$ et $u_2 = (4, 7\sqrt{5} - 9)$. Montrer que le système (u_1, u_2) est $\mathbb{Q}$-libre et $\mathbb{R}$-lié.
3. Soient les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$ et $v_2 = (2, -1 + i)$ dans $\mathbb{C}^2$.
   a. Montrer que le système (v_1, v_2) est $\mathbb{R}$-libre et $\mathbb{C}$-lié.
   b. Vérifier que le système $S = \{(1,0), (i, 0), (0,1), (0, i)\}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner les composantes des vecteurs v_1 et v_2 par rapport à cette base.

Allez à : Correction exercice 38

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

On peut éventuellement s'apercevoir que $v_2 - v_3 = 2v_1$ donc la famille est liée.

Sinon

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(4,1,4) + \gamma(2,-1,4) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 4\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ -3\beta - 3\gamma = 0 \\ 4\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$$

Il n'y a pas que $(0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée, en prenant $\gamma = 1$, on trouve que $\alpha = 2$ et que $\beta = -1$, par conséquent $2v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est la même relation que l'on avait « deviné » ci-dessus.

Allez à : Exercice 1

Correction exercice 2.

1.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,0,1) + \beta(0,2,2) + \gamma(3,7,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = -\dfrac{7}{2}\gamma \\ -3\gamma - 7\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = -\dfrac{7}{2}\gamma \\ -9\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc la famille est libre

2. Là, il est clair que $v_1 + v_2 = v_3$ donc la famille est liée
3. On peut raisonnablement s'apercevoir que :

$$v_1 + v_2 = (3,3,3,3,3) = 3(1,1,1,1,1) = 3(v_3 + v_4)$$

Donc la famille est liée.

Sinon on se lance dans un gros calcul

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 + \epsilon v_5 = 0_{\mathbb{R}^5}$$

$$\Rightarrow \alpha(1,2,1,2,1) + \beta(2,1,2,1,2) + \gamma(1,0,1,1,0) + \delta(0,1,0,0,1) = (0,0,0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \delta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \delta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -3\beta + \delta - 2\gamma = 0 \\ \gamma - \delta = 0 \\ -\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -3\beta + \delta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ -3\beta - \delta = 0 \\ \gamma = \delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3}\delta \\ \gamma = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\left(-\frac{1}{3}\delta\right) + \delta = 0 \\ \beta = -\frac{1}{3}\delta \\ \gamma = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{3}\delta \\ \beta = -\frac{1}{3}\delta \\ \gamma = \delta \end{cases}$$

Il n'y a pas que $(0,0,0,0)$ comme solution donc la famille est liée. En prenant $\delta = 3$, on trouve la relation :

$$-v_1 - v_2 + 3v_3 + 3v_4 = 0_{\mathbb{R}^5}$$

4.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^6} \Rightarrow \alpha(2,4,3,-1,-2,1) + \beta(1,1,2,1,3,1) + \gamma(0,-1,0,3,6,2) = (0,0,0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ -2\alpha + 3\beta + 6\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

On peut s'amuser à faire méthodiquement la méthode de Gauss, mais avec la première et la seconde ligne, on s'aperçoit que $\alpha = \beta = 0$, puis on remplace dans n'importe quelle ligne pour trouver que $\gamma = 0$.

La famille est libre.

5. C'est trop fatigant, $2v_1 + 3v_2 = v_3$, la famille est liée.

Allez à : Exercice 2

Correction exercice 3.

1. Oui évidemment, sinon

$$\alpha e_1 + 2\beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

2. Une sous famille d'une famille libre est libre.
3.

$$2 \times e_1 - 1 \times (2e_1 + e_4) + 1 \times e_4 = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Il existe une combinaison linéaire non identiquement nulle de ces trois vecteurs, la famille est liée.

4.

$$\alpha(3e_1 + e_3) + \beta e_3 + \gamma(e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow 3\alpha e_1 + \gamma e_2 + (\alpha + \beta + \gamma)e_3 = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

La famille est libre.

5. Il y a trois vecteurs $2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_2 - e_1$ dans le plan $Vect(e_1, e_2)$ donc ces trois vecteurs forment une famille liée, en rajoutant e_4 cela ne change rien, la famille est liée.

Allez à : Exercice 3

Correction exercice 4.

Le problème est de déterminer x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x, 1, y, 1) = \alpha u_1 + \beta u_2$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ y = 3\alpha + 3\beta \\ 1 = 4\alpha - 4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2\alpha - 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = y \\ 4\alpha - 4\beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \\ L_4 - 4L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -4\beta = 1 - 2x \\ 0 = y - 3x \\ -8\beta = 1 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -4\beta = 1 - 2x \\ 0 = y - 3x \\ 0 = -1 \end{cases}$$

La dernière ligne entraine qu'il n'y a pas de solution.
Le problème est de déterminer x et y tels qu'il existe α et β vérifiant $(x,1,1,y)=\alpha u_1+\beta u_2$

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta \\ 1=2\alpha-2\beta \\ 1=3\alpha+3\beta \\ y=4\alpha-4\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta=x \\ 2\alpha-2\beta=1 \\ 3\alpha+3\beta=1 \\ 4\alpha-4\beta=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \\ L_4-4L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta=x \\ -4\beta=1-2x \\ 0=1-3x \\ -8\beta=y-4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4-2L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta=x \\ -4\beta=1-2x \\ x=\dfrac{1}{3} \\ 0=y-4x-2(1-2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=x \\ -4\beta=1-2x \\ x=\dfrac{1}{3} \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{1}{3} \\ \beta=-\dfrac{1}{12} \\ x=\dfrac{1}{3} \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{5}{12} \\ \beta=-\dfrac{1}{12} \\ x=\dfrac{1}{3} \\ y=2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3},1,1,2\right)=\frac{5}{12}u_1-\frac{1}{12}u_2$$

Allez à : Exercice 4

Correction exercice 5.
Première méthode

$0+0+0+0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E$
Soit $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E$ et $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in E$, on a $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ et $y_1+y_2+y_3+y_4=0$

$$\alpha x+\beta y=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4)$$

Et pour tout α et β réels

$$\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3+\alpha x_4+\beta y_4=\alpha(x_1+x_2+x_3+x_4)+\beta(y_1+y_2+y_3+y_4)$$
$$=\alpha\times 0+\beta\times 0=0$$

Ce qui signifie que $\alpha x+\beta y\in E$, E est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Deuxième méthode

Un vecteur de E s'écrit $x=(-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)=x_2(-1,1,0,0)+x_3(-1,0,1,0)+x_4(-1,0,0,1)$
Donc $E=Vect\big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
Pour trouver une base, il reste à montrer que $\big((-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\big)$ est libre (Puisque cette famille est déjà génératrice).

$$\alpha(-1,1,0,0)+\beta(-1,0,1,0)+\gamma(-1,0,0,1)=(0,0,0,0)\Rightarrow\begin{cases} -\alpha-\beta-\gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

Cette famille est bien libre, c'est une base de E.

Allez à : Exercice 5

Correction exercice 6.

Déjà, une famille de 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 est liée, mais cela ne donne pas la (ou les) relation(s) reliant ces vecteurs.

$$\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,2,3,4)+\gamma(3,1,4,2)+\delta(10,4,13,7)+\epsilon(1,7,8,14)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \alpha+2\beta+\gamma+4\delta+7\epsilon=0\\ \alpha+3\beta+4\gamma+13\delta+8\epsilon=0\\ \alpha+4\beta+2\gamma+7\delta+14\epsilon=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1\\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\\ L_4-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ 2\beta+\gamma+3\delta+7\epsilon=0\\ 3\beta-\gamma-3\delta+13\epsilon=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3-2L_2\\ L_4-3L_2\end{array}\left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ 5\gamma+15\delta-5\epsilon=0\\ 5\gamma+15\delta-5\epsilon=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ \gamma+3\delta-\epsilon=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \alpha+\beta+3\gamma+10\delta+\epsilon=0\\ \beta-2\gamma-6\delta+6\epsilon=0\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=-\beta-3(-3\delta+\epsilon)-10\delta-\epsilon\\ \beta=2(-3\delta+\epsilon)+6\delta-6\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=4\epsilon-3(-3\delta+\epsilon)-10\delta-\epsilon\\ \beta=-4\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha=-\delta\\ \beta=-4\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{array}\right.$$

Si on prends $\delta=1$ et $\epsilon=0$, alors $\alpha=-1$, $\beta=0$ et $\gamma=-3$, ce qui donne

$$-v_1-3v_3+v_4=0_{\mathbb{R}^4}$$

Si on prends $\delta=0$ et $\epsilon=1$, alors $\alpha=0$, $\beta=-4$ et $\gamma=1$, ce qui donne

$$-4v_2+v_3+v_5=0_{\mathbb{R}^4}$$

Autre façon de voir les choses :

$\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,2,3,4)+\gamma(3,1,4,2)+\delta(10,4,13,7)+\epsilon(1,7,8,14)=(0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4+\epsilon v_5=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow -\delta v_1-4\epsilon v_2+(-3\delta+\epsilon)v_3+\delta v_4+\epsilon v_5=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \delta(-v_1-3v_3+v_4)+\epsilon(-4v_2+v_3+v_5)v_2=0_{\mathbb{R}^4}$$

Cette dernière relation étant vraie pour tout δ et pour tout ϵ, on retrouve les deux relations.

Ce ne sont pas les seules relations entre ces vecteurs, si on fait la somme ou la différence, on trouve d'autres relations

$v_4=v_1+3v_3$ et $v_5=4v_2-v_3$

$$Vect(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=Vect(v_1,v_2,v_3,v_1+3v_3,4v_2-v_3)=Vect(v_1,v_2,v_3)$$

Il reste à montrer que (v_1,v_2,v_3)est libre, ce qui est quasi évident puisqu'il suffit de refaire le calcul ci-dessus avec $\delta=\epsilon=0$ et alors $\left\{\begin{array}{c} \alpha=-\delta\\ \beta=-4\epsilon\\ \gamma=-3\delta+\epsilon\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{array}\right.$, cela montre que (v_1,v_2,v_3) est libre.

Allez à : Exercice 6

Correction exercice 7.

$$b\in Vect(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)=Vect(v_1,v_2,v_3)$$

D'après l'exercice précédent.

$b\in Vect(v_1,v_2,v_3)$ $\Leftrightarrow$il existe α, β et γ tels que $b=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3$

$$\begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+3\gamma=b_1\\ \alpha+2\beta+\gamma=b_2\\ \alpha+3\beta+4\gamma=b_3\\ \alpha+4\beta+2\gamma=b_4\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1\\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\\ L_4-L_1\end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta+3\gamma=b_1\\ \beta-2\gamma=b_2-b_1\\ 2\beta+\gamma=b_3-b_1\\ 3\beta-\gamma=b_4-b_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3-2L_2\\ L_4-3L_2\end{array}\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+3\gamma=b_1\\ \beta-2\gamma=b_2-b_1\\ 5\gamma=b_3-b_1-2(b_2-b_1)\\ 5\gamma=b_4-b_1-3(b_2-b_1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4-L_3\end{array}\left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+3\gamma=b_1\\ \beta-2\gamma=b_2-b_1\\ 5\gamma=b_3-b_1-2(b_2-b_1)\\ 0=b_4-b_1-2(b_2-b_1)-\big(b_3-b_1-2(b_2-b_1)\big)\end{array}\right.$$

$$0=b_4-b_1-3(b_2-b_1)-\big(b_3-b_1-2(b_2-b_1)\big)\Leftrightarrow b_1-b_2-b_3+b_4=0$$

$$b\in Vect(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)\Leftrightarrow b_1-b_2-b_3+b_4=0$$

On peut constater que les composantes de v_1, v_2 et v_3 vérifient $b_1-b_2-b_3+b_4=0$

Allez à : Exercice 7

Correction exercice 8.

1. Attention, ici x, y, z et t sont des vecteurs. Oui évidemment, sinon

$$\alpha x+2\beta y+\gamma z=0_E\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\2\beta=0\\\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

2. Une sous famille d'une famille libre est libre.

3.
$$2\times x-1\times(2x+t)+1\times t=0_{\mathbb{R}^n}$$
Il existe une combinaison linéaire non identiquement nulle de ces trois vecteurs, la famille est liée.

4.
$$\alpha(3x+z)+\beta z+\gamma(y+z)=0_{\mathbb{R}^n}\Rightarrow 3\alpha x+\gamma y+(\alpha+\beta+\gamma)z=0_E\Rightarrow\begin{cases}3\alpha=0\\\gamma=0\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$
La famille est libre.

5. Il y a trois vecteurs $2x+y,x-3y,y-x$ dans le plan $Vect(x,y)$ donc ces trois vecteurs forment une famille liée, en rajoutant t cela ne change rien, la famille est liée.

Allez à : Exercice 8

Correction exercice 9.

Comparer deux ensembles signifie que l'on doit trouver si l'un est inclus dans l'autre (ou réciproquement) ou si les ensemble sont égaux.
On va d'abord caractériser F à l'aide d'une (ou plusieurs) équation cartésienne, ensuite il sera simple de savoir si les vecteurs qui engendrent G sont dans F.
$u=(x,y,z,t)\in F\Leftrightarrow$ il existe α,β,γ réels tels que $u=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,5)$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=x\\-2\beta-3\gamma=y\\\alpha+3\beta+\gamma=z\\\alpha-\beta+5\gamma=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_1\\L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=x\\-2\beta-3\gamma=y\\4\beta+6\gamma=-x+z\\10\gamma=-x+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+2L_1\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=x\\-2\beta-3\gamma=y\\0=-x+z+2y\\10\gamma=-x+t\end{cases}$$

α,β,γsont donnés par les équations L_1, L_2 et L_4 donc
$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,-x+2y+z=0\}$$
$$-(-1)+2(-1)+1=0\Rightarrow(-1,-1,1,-1)\in F$$
$$-4+2\times 1+2=0\Rightarrow(4,1,2,4)\in F$$
Cela montre que $G\subset F$
Manifestement $\dim(G)=2$ car les deux vecteurs qui engendrent G ne sont pas colinéaires (donc ils forment une base de G).
Si on en savait plus on saurait que $\dim(F)=3$, mais on n'est pas censé le savoir.
Il faut montrer que les trois vecteurs qui engendrent F sont libres, ils formeront une base et la dimension de F sera 3.
On reprend calcul de $u=\alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,5)$ avec $u=(0,0,0,0)$
On trouve
$$\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=x\\-2\beta-3\gamma=y\\0=-x+z+2y\\10\gamma=-x+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta-5\gamma=0\\-2\beta-3\gamma=0\\0=-0+0+2\times 0\\10\gamma=-0+0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$
C'est bon, $\dim(F)=3$.
$$\begin{cases}G\subset F\\\dim(G)<\dim(F)\end{cases}\Rightarrow G\subsetneq F$$
Autrement dit G est inclus dans F mais G n'est pas égal à F

Allez à : Exercice 9

Correction exercice 10.

1.
$$(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+(v_3-v_4)+\cdots+(v_{n-1}-v_n)+(v_n-v_1)=0_{\mathbb{R}^n}$$
Cette famille est liée.

2. Si $n=2p+1$

$$\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_2+v_3)+\alpha_3(v_3+v_4)+\cdots+\alpha_{2p}(v_{2p}+v_{2p+1})+\alpha_{2p+1}(v_{2p+1}+v_1)=0_{\mathbb{R}^{2p+1}}$$
$$\Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_{2p+1})v_1+(\alpha_1+\alpha_2)v_2+(\alpha_2+\alpha_3)v_3+\cdots+(\alpha_{2p-1}+\alpha_{2p})v_{2p}+(\alpha_{2p}+\alpha_{2p+1})v_{2p+1}$$
$$=0_{\mathbb{R}^{2p+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_{2p+1}=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \\ \vdots \\ \alpha_{2p-1}+\alpha_{2p}=0 \\ \alpha_{2p}+\alpha_{2p+1}=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_{2p+1}=-\alpha_1=\alpha_2=-\alpha_3=\cdots=\alpha_{2p}=-\alpha_{2p+1}$$

Donc $\alpha_{2p+1}=0$ et on en déduit que pour tout $i\in\{1,2,\dots,2p\}$, $\alpha_i=0$.
La famille est libre.
Si $n=2p$

$$1\times(v_1+v_2)-1\times(v_2+v_3)+1\times(v_3+v_4)-\cdots+1\times(v_{2p-1}+v_{2p})-1\times(v_{2p}+v_1)$$
$$=(1-1)v_1+(1-1)v_2+(-1+1)v_3+(1-1)v_4+\cdots(-1+1)v_{2p-1}$$
$$+(1-1)v_{2p}=0_{\mathbb{R}^n}$$

La famille est liée
Pour s'en convaincre, on pourra regarder plus précisément les cas $n=3$ et $n=4$.

3.

$$\alpha_1v_1+\alpha_2(v_1+v_2)+\alpha_3(v_1+v_2+v_3)+\cdots+\alpha_{n-1}(v_1+v_2+\cdots+v_{n-1})+\alpha_n(v_1+\cdots+v_n)$$
$$=0_{\mathbb{R}^n}\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n=0 \\ \alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n=0 \\ \alpha_3+\cdots+\alpha_n=0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}+\alpha_n=0 \\ \alpha_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}=0 \\ \alpha_n=0 \end{cases}$$

La famille est libre.
Allez à : Exercice 10

Correction exercice 11.

$$c=2a-b\in Vect(a,b)=E$$
$$d=a+3b\in Vect(a,b)=E$$

Donc $F\subset E$, or a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est une base de E et $\dim(E)=2$, de même c et d ne sont pas proportionnels donc (c,d) est une base de F et $\dim(F)=2$.
J'ai passé sous silence que (a,b) est une famille génératrice de E et que (c,d) est une famille génératrice de F.

$$\begin{cases} E\subset F \\ \dim(E)=\dim(F) \end{cases} \Rightarrow E=F$$

Il y a d'autre façon de faire, par exemple en trouvant pour E et F une équation cartésienne caractérisant ces espaces.
Allez à : Exercice 11

Correction exercice 12.
On cherche x, y, α et β tel que :

$$(-2,x,y,3)=\alpha(1,-1,1,2)+\beta(-1,2,3,1)\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ -\alpha+2\beta=x \\ \alpha+3\beta=y \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-2L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ \beta=x-2 \\ 4\beta=y+2 \\ 3\beta=7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ \beta=x-2 \\ 4\beta=y+2 \\ \beta=\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{3} \\ x=\frac{13}{3} \\ y=\frac{22}{3} \\ \beta=\frac{7}{3} \end{cases}$$

La réponse est oui.
Allez à : Exercice 12

Correction exercice 13.

1.

Première méthode

D'abord on remarque que $(1,1,0,0)=u_1+u_2$ que $(-1,1,-4,2)=u_1-u_2$ et que $u_3=2u_1+3u_2$

Donc

$$\begin{aligned}Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)&=Vect(u_1-u_2,u_1+u_2)=Vect(u_1-u_2+u_1+u_2,u_1+u_2)\\&=Vect(2u_1,u_1+u_2)=Vect(u_1,u_1+u_2)=Vect(u_1,u_2)\end{aligned}$$

Et

$$Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect(u_1,u_2,2u_1+3u_3)=Vect(u_1,u_2)$$

On a bien

$$Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$$

Deuxième méthode

On cherche une (ou plusieurs) équation cartésien caractérisant $E=Vect\big((1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\big)$

$u=(x,y,z,t)\in E\Leftrightarrow$ il existe α et β tels que $(x,y,z,t)=\alpha(1,1,0,0)+\beta(-1,1,-4,2)$

$$(x,y,z,t)=\alpha(1,1,0,0)+\beta(-1,1,-4,2)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta=x\\\alpha+\beta=y\\-4\beta=z\\2\beta=t\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3\\L_4\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta=x\\2\beta=-x+y\\-4\beta=z\\2\beta=t\end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+2L_2\\L_4-L_2\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta=x\\2\beta=-x+y\\0=z-2x+2y\\0=t+x-y\end{matrix}\right.$$

Donc $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,-2x+2y+z=0\ \ et\ \ x-y+t=0\}$

$$-2\times0+2\times1-2=0\ \ et\ \ 0-1-1=0\Rightarrow u_1\in E$$
$$-2\times1+2\times0+2=0\ \ et\ \ 1-0-1=0\Rightarrow u_2\in E$$
$$-2\times3+2\times2+2=0\ \ et\ \ 3-2-1=0\Rightarrow u_3\in E$$

Donc $Vect(u_1,u_2,u_3)\subset E$,

$(1,1,0,0)$ et $(-1,1,-4,2)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base et donc $\dim(E)=2$, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de $Vect(u_1,u_2,u_3)$, donc $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big)\geq2$, mais $Vect(u_1,u_2,u_3)\subset E$ donc $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big)\leq\dim(E)=2$

On a par conséquent $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_3)\big)=2=\dim(E)$ et comme $Vect(u_1,u_2,u_3)\subset E$, on a alors

$$Vect(u_1,u_2,u_3)=E$$

2.

$$(1,1,0,0)=u_1+u_2\in Vect(u_1,u_2)$$
$$u_2-u_3=(2,2,0,0)=2(1,1,0,0)$$
$$(1,1,0,0)=\frac{1}{2}u_2-\frac{1}{2}u_3\in Vect(u_2,u_3,u_4)$$
$$(1,1,0,0)\in Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)$$

3. $u_2\in Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)$ donc $\dim\big(Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)\big)\geq1$

Le tout est de savoir si $u_1\in Vect(u_2,u_3,u_4)$?

Or au 2. on a vu que $(1,1,0,0)\notin Vect(u_2,u_3,u_4)$

Si $u_1\in Vect(u_2,u_3,u_4)$ alors $(1,1,0,0)=u_1+u_2\in Vect(u_2,u_3,u_4)$ ce qui est faux, donc

$$u_1\notin Vect(u_2,u_3,u_4)$$

Par conséquent

$$\dim\big(Vect(u_1,u_2)\cap Vect(u_2,u_3,u_4)\big)=1$$

4.

Première méthode

$$\begin{aligned}Vect(u_1,u_2)+Vect(u_2,u_3,u_4)&=Vect(u_1,u_2,u_2,u_3,u_4)=Vect(u_1,u_2,u_3,u_4)\\&=Vect(u_1,u_2,2u_1+3u_2,u_4)=Vect(u_1,u_2,u_4)\subsetneq\mathbb{R}^4\end{aligned}$$

En effet $\dim\big(Vect(u_1,u_2,u_4)\big)\leq3$

Deuxième méthode si on n'a pas vu que $u_3 = 2u_1 + 3u_2$

$$\begin{aligned}Vect(u_1, u_2) + Vect(u_2, u_3, u_4) &= Vect(u_1, u_2, u_2, u_3, u_4) = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)\\ &= Vect(u_1, u_2, u_3) + Vect(u_4) = Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big) + Vect(u_4)\end{aligned}$$

D'après la première question.

Donc

$$\begin{aligned}Vect(u_1, u_2) + Vect(u_2, u_3, u_4) &= Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big) + Vect(u_4)\\ &= Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2), u_4\big) \subsetneq \mathbb{R}^4\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que dans la première méthode.

5.

$$Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big)$$

$$\Rightarrow \dim\big(Vect(u_1, u_2, u_3)\big) = \dim\Big(Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big)\Big) = 2$$

Comme u_4 et u_5 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $Vect(u_4, u_5)$ et $\dim\big(Vect(u_4, u_5)\big) = 2$

Il reste à vérifier que l'intersection de ces sous-espaces vectoriels est réduite au vecteur nul, ce qui revient au même que de montrer que $\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2), u_4, u_5\big)$ est libre (mais alors comme le nombre de vecteurs est 4 on pourrait en déduire cette famille est une base de $\mathbb{R}^4$ ce qui suffit à prouver que la somme de ces deux sous-espaces vectoriels est directe et qu'elle vaut $\mathbb{R}^4$).

$$\alpha(1,1,0,0) + \beta(-1,1,-4,2) + \gamma u_4 + \delta u_5 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -4\beta + \gamma = 0 \\ 2\beta + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

C'est quasiment évident.

La famille est libre, elle a 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$, donc

$$Vect(u_1, u_2, u_3) \oplus Vect(u_4, u_5) = \mathbb{R}^4$$

Autre méthode

$$Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big)$$

$$\Rightarrow \dim\big(Vect(u_1, u_2, u_3)\big) = \dim\Big(Vect\big((1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\big)\Big) = 2$$

Comme u_4 et u_5 ne sont pas colinéaires, ils forment une base de $Vect(u_4, u_5)$ et $\dim\big(Vect(u_4, u_5)\big) = 2$

(Çà, c'est pareil)

A la question 1°) on a montré que

$$Vect(u_1, u_2, u_3) = E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -2x + 2y + z = 0 \ \ et \ \ x - y + t = 0\}$$

Il n'y a qu'à montrer que les composantes de u_4 et de u_5 ne vérifient pas ces équations (c'est évident) pour en déduire que $u_4 \notin E$ et que $u_5 \notin E$ et que par conséquent $E \cap Vect(u_4, u_5) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

La somme des dimensions valant 4 (voir ci-dessus) la somme est directe et vaut $\mathbb{R}^4$

$$Vect(u_1, u_2, u_3) \oplus Vect(u_4, u_5) = \mathbb{R}^4$$

Allez à : Exercice 13

Correction exercice 14.

1.

$\dim\big(Vect(v_1, v_2)\big) \leq 2$ et $\dim\big(Vect(v_3)\big) = 1$ donc la somme des dimensions n'est pas 4, ces espaces sont peut-être en somme directe mais cette somme n'est pas $\mathbb{R}^4$, ils ne sont donc pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Remarque : en fait $\dim\big(Vect(v_1, v_2)\big) = 2$ car v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.

2.

D'abord on va regarder si la famille (v_1, v_3, v_4) est libre, si c'est le cas la réponse sera non car la dimension de cet espace sera 3 et celle de $Vect(v_2, v_5)$ est manifestement 2, donc la somme des dimensions sera 5.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_4=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow \alpha(1,0,0,1),+\beta(0,0,1,0)+\gamma(0,0,0,1)=(0,0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\0=0\\\beta=0\\\alpha+\gamma=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

(v_1,v_3,v_4) est une famille libre qui engendre $Vect(v_1,v_3,v_4)$, c'est donc une base de cet espace donc $\dim\big(Vect(v_1,v_3,v_4)\big)=3$, comme v_2 et v_5 ne sont pas proportionnels, (v_2,v_5) est une famille libre qui engendre $Vect(v_2,v_5)$, c'est donc une base de cet espace et $\dim\big(Vect(v_2,v_5)\big)=2$.

$$\dim\big(Vect(v_1,v_3,v_4)\big)+\dim\big(Vect(v_2,v_5)\big)=5\neq\dim(\mathbb{R}^4)$$

Donc ces espace ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

3. v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires donc (v_1,v_2) est une famille libre qui engendre $Vect(v_1,v_2)$, c'est une base de cet espace et $\dim\big(\mathrm{Vect}(v_1,v_2)\big)=2$.
Manifestement $v_5=v_3+v_4$, $Vect(v_3,v_4,v_5)=Vect(v_3,v_4,v_3+v_4)=Vect(v_3,v_4)$, v_3 et v_4 ne sont pas colinéaires donc (v_3,v_4) est une famille libre qui engendre $Vect(v_3,v_4,v_5)=Vect(v_3,v_4)$ c'est donc une base de cet ensemble et $\dim\big(Vect(v_3,v_4,v_5)\big)=2$.
$$\dim\big(Vect(v_1,v_2)\big)+\dim\big(Vect(v_3,v_4,v_5)\big)=4=\dim(\mathbb{R}^4)$$
Il reste à montrer que l'intersection de ces espaces est réduite au vecteur nul.
Ce coup-ci je vais détailler un peu plus. Soit $u\in Vect(v_1,v_2)\cap Vect(v_3,v_4)$, il existe α, β, γ et δ réels tels que :
$$u=\alpha v_1+\beta v_2\ et\ u=\gamma v_3+\delta v_4$$
Ce qui entraine que
$$\alpha v_1+\beta v_2=\gamma v_3+\delta v_4\Leftrightarrow \alpha v_1+\beta v_2-\gamma v_3-\delta v_4=0_{\mathbb{R}^4}$$
Cela montre que
$u=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow(v_1,v_2,v_3,v_4)$ est libre. Résultat que l'on utilise sans avoir à le montrer.
Mais ici, si on montre que la famille est libre, comme elle a 4 vecteurs, cela montrera que c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et que
$$Vect(v_1,v_2)\oplus Vect(v_3,v_4)=\mathbb{R}^4$$
Mais dans cet exercice il fallait quand montrer que
$$Vect(v_3,v_4,v_5)=Vect(v_3,v_4,v_3+v_4)=Vect(v_3,v_4)$$
On y a va :
$$\alpha v_1+\beta v_2-\gamma v_3-\delta v_4=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha(1,0,0,1),+\beta(0,0,1,0)-\gamma(0,1,0,0)-\delta(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\-\gamma=0\\\beta=0\\\alpha-\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\\\delta=0\end{cases}$$
Donc $u=\alpha v_1+\beta v_2=0_{\mathbb{R}^4}$ et $Vect(v_1,v_2)\cap Vect(v_3,v_4)=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$
Comme la somme des dimensions est 4 on a :
$$Vect(v_1,v_2)\oplus Vect(v_3,v_4,v_5)=Vect(v_1,v_2)\oplus Vect(v_3,v_4)=\mathbb{R}^4$$

Allez à : Exercice 14

Correction exercice 15.

1. $0=2\times 0$ donc $0_{\mathbb{R}^2}\in E$.
Soient $u=(x,y)\in E, y=2x$ et $u'=(x',y')\in E, y'=2x'$
Pour tout λ et λ' deux réels
$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y')=(X,Y)$$
$$Y=\lambda y+\lambda' y'=\lambda 2x+\lambda' 2x'=2(\lambda x+\lambda' x')=2X$$
Donc $\lambda u+\lambda' u'\in E$. Ce qui montre que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $u=(2,2,0)\in F$ car $y^2=2^2=2\times 2=2x$ et $z=0$
$2u=(4,4,0)$ $y^2=4^2=16\neq 2\times 4=8$ donc $2u\notin F$ donc F n'est pas un sous-espace vectoriel.

Allez à : Exercice 15

Correction exercice 16.

1. Regardons si la famille (u_1,u_2,u_3) est libre
$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \lambda_1(1,-1,2)+\lambda_2(1,1,-1)+\lambda_3(-1,-5,7)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\-\lambda_1+\lambda_2-5\lambda_3=0\\2\lambda_1-\lambda_2+7\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\2\lambda_2-6\lambda_3=0\\-3\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_2=3\lambda_3\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_3-\lambda_3=0\\\lambda_2=3\lambda_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-2\lambda_3\\\lambda_2=3\lambda_3\end{cases}$$
Donc la famille n'est pas libre, de plus en prenant $\lambda_3=1$, $\lambda_1=-2$ et $\lambda_2=3$, par conséquent
$$-2u_1+3u_2+u_3=0_{\mathbb{R}^3}$$
Autrement dit
$$u_3=-2u_1+3u_2$$
$$E=Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect(u_1,u_2,-2u_1+3u_2)=Vect(u_1,u_2)$$
Comme les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base de E.
2. $0+0+0=0$, par conséquent $0_{\mathbb{R}^3}\in F$
Soient $u=(x,y,z)\in F$ et $u'(=x',y',z')\in F$, on a donc $x+y+z=0$ et $x'+y'+z'=0$
Soient λ et λ' deux réels quelconques
$$\lambda u+\lambda'u'=(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y',\lambda z+\lambda'z')=(X,Y,Z)$$
$$X+Y+Z=(\lambda x+\lambda'x')+(\lambda y+\lambda'y')+(\lambda z+\lambda'z')=\lambda(x+y+z)+\lambda(x'+y'+z')$$
$$=\lambda\times 0+\lambda'\times 0=0$$
Ce qui montre que $\lambda u+\lambda'u'\in F$.
Finalement F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $u=(x,y,z)\in F\Leftrightarrow x+y+z=0\Leftrightarrow z=-x-y$
Donc $u=(x,y,-x-y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-1)$, on pose $a=(1,0,-1)$ et $b=(0,1,-1)$
(a,b) est une famille génératrice de F et comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre, c'est une base de F
4. Soit $u\in E\cap F$, il existe α,β,γ et δ tels que
$$\begin{cases}u=\alpha u_1+\beta u_2\\u=\gamma a+\beta b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\alpha u_1+\beta u_2\\u=\gamma a+\delta b\\\alpha u_1+\beta u_2=\gamma a+\beta b\end{cases}$$
$$\alpha u_1+\beta u_2=\gamma a+\beta b\Leftrightarrow \alpha(1,-1,2)+\beta(1,1,-1)=\gamma(1,0,-1)+\delta(0,1,-1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha(1,-1,2)+\beta(1,1,-1)-\gamma(1,0,-1)-\delta(0,1,-1)\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\-\alpha+\beta-\delta=0\\2\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma-\delta=0\\-\beta+3\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\2L_3+L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma-\delta=0\\5\gamma+\delta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma-\delta=0\\\delta=-5\gamma\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\2\beta-\gamma+5\gamma=0\\\delta=-5\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\\beta=-2\gamma\\\delta=-5\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\gamma\\\beta=-2\gamma\\\delta=-5\gamma\end{cases}$$
Il reste à remplacer α,β et δ dans $u=\alpha u_1+\beta u_2$ ou dans $u=\gamma a+\delta b$
$$u=\alpha u_1+\beta u_2=3\gamma(1,-1,2)-2\gamma(1,1,-1)=\gamma(1,-5,4)$$
En utilisant $u=\gamma a+\delta b$ on retrouve le même résultat
$$u=\gamma a+\delta b=\gamma(1,0,-1)-5\gamma(0,1,-1)=\gamma(1,-5,4)$$
On pose $c=(1,-5,4)$ et $E\cap F=Vect(c)$

Allez à : Exercice 16

Correction exercice 17.

1. $0+0=0 \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$

   Soit $u=(x,y,z)\in E$, $y+z=0$ et soit $u'\in E$, $y'+z'=0$, pour tout $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$
$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z')$$
   Comme
$$(\lambda y+\lambda' y')+(\lambda z+\lambda' z')=\lambda(y+z)+\lambda'(y'+z')=\lambda\times 0=\lambda'\times 0=0$$
$$\lambda u+\lambda' u'\in E$$
   E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   Soit $u=(x,y,z)\in E$, $y+z=0 \Leftrightarrow z=-y$, donc
$$u\in E \Leftrightarrow u=(x,y,-y)=x(1,0,0)+y(0,1,-1)$$
$$E=vect(e_1,e_2-e_3)$$
   e_1 et e_2-e_3 ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre et génératrice de E, c'est une base de E.
2.
$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)+\gamma(1,1,-1)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ \alpha-2\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-\gamma=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta+\gamma=0\\ -4\beta=0\\ -3\beta-2\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$
   La famille (u_1,u_2,u_3) est libre.

Première méthode

   Si $u_3\in F$ alors ils existent α et β réels tels que $u_3=\alpha u_1+\beta u_2$, ce qui signifie que (u_1,u_2,u_3) est liée, ce qui est faux, donc $u_3\notin F$

Deuxième méthode
$$u_3\in F \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, u_3=\alpha u_1+\beta u_2 \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, (1,1,-1)=\alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}1=\alpha+2\beta\\ 1=\alpha-2\beta\\ -1=\alpha-\beta\end{cases} \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{matrix}L_1\\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}1=\alpha+2\beta\\ 0=-4\beta\\ -2=-3\beta\end{cases}$$
   Les deux dernières lignes montrent que ce n'est pas possible, par conséquent $u_3\notin F$
3. $u_3=(1,1,-1)$, $1+(-1)=0 \Leftrightarrow u_3\in E$.
4.
$$u=(x,y,z)\in E\cap F \Leftrightarrow \begin{cases}u\in E\\ u\in F\end{cases} \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}y+z=0\\ u=\alpha u_1+\beta u_2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}y+z=0\\ (x,y,z)=\alpha(1,1,1)+\beta(2,-2,-1)\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}y+z=0\\ x=\alpha+2\beta, y=\alpha-2\beta, z=\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}(\alpha-2\beta)+(\alpha-\beta)=0\\ x=\alpha+2\beta, y=\alpha-2\beta, z=\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\beta\\ x=\alpha+2\beta, y=\alpha-2\beta, z=\alpha-\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\beta\\ x=\frac{7}{2}\alpha, y=-\frac{1}{2}\alpha, z=\frac{1}{2}\alpha\end{cases}$$
   Donc si on pose $a=(7,-1,1)$
$$E\cap F=Vect(a)$$
5. $u_4=(-1,7,5)$, $7+5\neq 0$ donc $u_4\notin E$

$u_4 \in F \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_4)$ est liée

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(2,-2,-1) + \gamma(-1,7,5) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + 7\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -4\beta + 8\gamma = 0 \\ -3\beta - 6\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 4\gamma - \gamma = 0 \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases}$$

La famille est liée par la relation

$$-3u_1 + 2u_2 + u_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow u_4 = 3u_1 - 2u_2$$

Ce qui montre bien que $u_4 \in F$

Allez à : Exercice 17

Correction exercice 18.

1. Première méthode

$$0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$

Soient $u = (x, y, z) \in E$ et $u' = (x', y', z') \in E$, on a $x + y + z = 0$ et $x' + y' + z' = 0$. Pour tout λ et λ' réels, $\lambda u + \lambda' u' = (\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y', \lambda z + \lambda' z')$, ce qui entraine que

$$(\lambda x + \lambda' x') + (\lambda y + \lambda' y') + (\lambda z + \lambda' z') = \lambda(x + y + z) + \lambda'(x' + y' + z') = 0$$

D'où, $\lambda u + \lambda' u' \in E$, ce qui achève de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Deuxième méthode

Comme $z = -x - y$, $u = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow u = (x, y, -x - y) = x(1,-1,0) + y(0,1,-1)$ ce qui montre que

$$E = Vect\big((1,-1,0), (0,1,-1)\big)$$

Et que par conséquent E est un espace vectoriel.

2. Première méthode.

Soit $u = (x, y, z) \in E \cap F$, d'une part $x + y + z = 0$ car $u \in E$ et il existe α et β, réels tels que $u = \alpha a + \beta b$ car $u \in F$. Cette dernière égalité s'écrit aussi

$$(x, y, z) = \alpha(1,-2,3) + \beta(2,1,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \end{cases}$$

Par conséquent

$$u \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ (\alpha + 2\beta) + (-2\alpha + \beta) + (3\alpha - \beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha - \beta \\ \beta = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 4\alpha \\ \beta = -\alpha \end{cases}$$

Cela montre qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha(-1,-3,4)$

Autrement dit si on pose $c = (-1,-3,4)$, $E \cap F = Vect(c)$

Deuxième méthode

On cherche une ou plusieurs équations caractérisant F

$$u=(x,y,z)\in F\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},u=\alpha a+\beta b\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},(x,y,z)$$
$$=\ \alpha(1,-2,3)+\beta(2,1,-1)\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta\in\mathbb{R},\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\-2\alpha+\beta=y\\3\alpha-\beta=z\end{cases}\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$
$$\in\mathbb{R},\begin{matrix}\\L_2+2L_1\\L_3-3L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\5\beta=y+2x\\-7\beta=z-7x\end{cases}\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$
$$\in\mathbb{R},\begin{matrix}\\\\5L_3+7L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\5\beta=y+2x\\0=5(z-3x)+7(y+2x)\end{cases}\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R},\exists\beta$$
$$\in\mathbb{R},\begin{matrix}\\\\4L_3+5L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+2\beta=x\\5\beta=y+2x\\-x+7y+5z=0\end{cases}$$

Donc $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,-x+7y+5z=0\}$

Ensuite on cherche l'intersection

$$u=(x,y,z)\in E\cap F\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\-x+7y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow L_2+L_1\begin{cases}x+y+z=0\\8y+6z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\y=-\frac{3}{4}z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{3}{4}z+z=0\\y=-\frac{3}{4}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{4}z\\y=-\frac{3}{4}z\end{cases}$$

Par conséquent $u=\left(-\frac{1}{4}z,-\frac{3}{4}z,z\right)=\frac{z}{4}(-1,-3,4)$

On trouve le même résultat.

Troisième méthode

On cherche une équation du plan F (parce que l'on se doute bien que c'est un plan). Un vecteur orthogonal à ce plan est $a\wedge b$ dont les coordonnées sont

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3\\6+1\\1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\\5\end{pmatrix}$$

Et l'ensemble des vecteurs $u=(x,y,z)$ orthogonaux à ce vecteur vérifient

$$-x+7y+5z=0$$

Puis on finit comme dans la deuxième méthode.

3. $E\cap F\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, on n'a pas $E\oplus F=\mathbb{R}^3$.

Ou alors $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4\neq 3=\dim(\mathbb{R}^3)$, si on a montré que E et F étaient des plans.

Allez à : Exercice 18

Correction exercice 19.

1.

$$u=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-2z=0\\2x-y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\\L_1\\L_2\\L_3-2L_2\end{matrix}\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-2z=0\\-3y+3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x=z\\y=z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=(z,z,z)=z(1,1,1)\\x=z\\y=z\end{cases}$$

Donc $E=Vect(a)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode

$$\begin{cases}0+0-2\times 0=0\\2\times 0-0-0=0\end{cases}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$$

Soient $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in E$ et $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in E$, on a $\begin{cases}x_1+y_1-2z_1=0\\2x_1-y_1-z_1=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x_2+y_2-2z_2=0\\2x_2-y_2-z_2=0\end{cases}$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

$$\begin{cases}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - 2(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(x_1 + y_1 - 2z_1) + \lambda_2(x_2 + y_2 - 2z_2) = 0 \\ 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(2x_1 - y_1 - z_1) + \lambda_2(2x_2 - y_2 - z_2) = 0\end{cases}$$

Ce qui montre que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E$

Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur est non nul, c'est une base de E, bref E est la droite engendrée par le vecteur a.
3.

$$1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow b \in F$$
$$0 + 1 - 1 = 0 \Rightarrow c \in F$$

b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F donc $\dim(F) \geq 2$.

$(1,0,0) \notin F$ donc $F \subsetneq \mathbb{R}^3$ par conséquent $\dim(F) < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

On déduit de cela que $\dim(F) = 2$ et que par suite la famille $\{b, c\}$ est libre (dans F) à deux éléments, c'est une base de F.

4.

$1 + 1 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow a \notin Vect(b, c)$ et $\{b, c\}$ est libre donc $\{a, b, c\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque cette famille a trois éléments)

5. $\{a\}$ est une base de E, $\{b, c\}$ est une base de F et $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par conséquent

$$E \oplus F = \mathbb{R}^3$$

6. On cherche α, β, γ tels que $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c \Leftrightarrow (x, y, z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,0,1) + \gamma(0,1,1) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta \quad = x \\ \alpha \quad + \gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \alpha + \beta \quad = x \\ -\beta + \gamma = -x + y \\ \gamma = -x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta + x \\ \beta = \gamma + x - y \\ \gamma = -x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x + y - z \\ \beta = -y + z \\ \gamma = -x + z \end{cases}$$

$$u = (x + y - z)a + (-y + z)b + (-x + z)c$$

Allez à : Exercice 19

Correction exercice 20.

1°)

$$u = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} u = (x, y, z) \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 2L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} u = (x, y, z) \\ x + 2y + z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = (x, y, z) \\ x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = (z, z, z) = -z(1, -1, 1) \\ x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $E = Vect(a)$ avec $a = (1, -1, 1)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode

$$\begin{cases} 2 \times 0 + 0 - 0 = 0 \\ 0 + 2 \times 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in E$$

Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in E$, on a $\begin{cases} 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ x_1 + 2y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x_2 + y_2 - z_2 = 0 \\ x_2 + 2y_2 + z_2 = 0 \end{cases}$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

$$\begin{cases} 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(2x_1 + y_1 - z_1) + \lambda_2(2x_2 + y_2 - z_2) = 0 \\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(x_1 + 2y_1 + z_1) + \lambda_2(x_2 + 2y_2 + z_2) = 0 \end{cases}$$

Ce qui montre que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E$

Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2°) $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur est non nul, c'est une base de E, bref E est la droite engendrée par le vecteur a.

3°)

$$2\times(-2)-3\times(-1)+1=0\Rightarrow b\in F$$
$$2\times(-1)-3\times 0+2=0\Rightarrow c\in F$$

b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F donc $\dim(F)\geq 2$.

$(1,0,0)\notin F$ donc $F\subsetneq\mathbb{R}^3$ par conséquent $\dim(F)<\dim(\mathbb{R}^3)=3$.

On déduit de cela que $\dim(F)=2$ et que par suite la famille $\{b,c\}$ est libre (dans F) à deux éléments, c'est une base de F.

4°)

$2\times 1-3\times(-1)+1=6\neq 0\Rightarrow a\notin Vect(b,c)$ et $\{b,c\}$ est libre donc $\{a,b,c\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque cette famille a trois éléments)

5°) $\{a\}$ est une base de E, $\{b,c\}$ est une base de F et $\{a,b,c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par conséquent

$$E\oplus F=\mathbb{R}^3$$

6°) On cherche α,β,γ tels que $u=\alpha a+\beta b+\gamma c$

$$u=\alpha a+\beta b+\gamma c\Leftrightarrow(x,y,z)=\alpha(1,-1,1)+\beta(-2,-1,1)+\gamma(-1,0,2)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}\alpha-2\beta-\gamma=x\\-\alpha-\beta\quad=y\\\alpha+\beta+2\gamma=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\\L_3-L_1\end{matrix}\begin{cases}\alpha-2\beta-\gamma=x\\-3\beta-\gamma=x+y\\3\beta+3\gamma=-x+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}\\ \\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha=2\beta+\gamma+x\\-3\beta=\gamma+x+y\\2\gamma=y+z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\beta+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+x\\-3\beta=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+x+y=x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z\\\gamma=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\right)+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+x\\\beta=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\\\gamma=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}z\\\beta=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\\\gamma=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\end{cases}$$

$$u=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}z\right)a+\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}z\right)b+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)c$$

Allez à : Exercice 20

Correction exercice 21.

1.

$$u=(x,y,z)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-z=0\\x-y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}u=(x,y,z)\\x+y-z=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x,y,z)\\x=z\\y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=(z,0,z)=z(1,0,1)\\x=z\\y=0\end{cases}$$

Donc $E=Vect(a)$ ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Autre méthode

$$\begin{cases}0+0-0=0\\0-0-0=0\end{cases}\Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3}\in E$$

Soient $u_1=(x_1,y_1,z_1)\in E$ et $u_2=(x_2,y_2,z_2)\in E$, on a $\begin{cases}x_1+y_1-z_1=0\\x_1-y_1-z_1=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x_2+y_2-z_2=0\\x_2-y_2-z_2=0\end{cases}$

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

$$\begin{cases}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(x_1 + y_1 - z_1) + \lambda_2(x_2 + y_2 - z_2) = 0 \\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) = \lambda_1(x_1 - y_1 - z_1) + \lambda_2(x_2 - y_2 - z_2) = 0\end{cases}$$

Ce qui montre que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in E$

Et finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $\{a\}$ est une famille génératrice de E, ce vecteur est non nul, c'est une base de E, bref E est la droite engendrée par le vecteur a.
3.

$$1 + 1 - 2 \times 1 = 0 \Rightarrow b \in F$$
$$0 + 2 - 2 \times 1 = 0 \Rightarrow c \in F$$

b et c ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de F donc $\dim(F) \geq 2$.

$(1,0,0) \notin F$ donc $F \subsetneq \mathbb{R}^3$ par conséquent $\dim(F) < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

On déduit de cela que $\dim(F) = 2$ et que par suite la famille $\{b, c\}$ est libre (dans F) à deux éléments, c'est une base de F.

4.

$1 + 0 - 2 \times 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow a \notin Vect(b, c)$ et $\{b, c\}$ est libre donc $\{a, b, c\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque cette famille a trois éléments)

5. $\{a\}$ est une base de E, $\{b, c\}$ est une base de F et $\{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par conséquent
$$E \oplus F = \mathbb{R}^3$$
6. On cherche α, β, γ tels que $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$
7. $u = \alpha a + \beta b + \gamma c \Leftrightarrow (x, y, z) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,2,1) \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases}\alpha + \beta \quad = x \\ \beta + 2\gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma = z\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}\begin{cases}\alpha + \beta \quad = x \\ \beta + 2\gamma = y \\ \gamma = -x + z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -\beta + x \\ \beta = -2\gamma + y \\ \gamma = -x + z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -\beta + x \\ \beta = -2(-x + z) + y \\ \gamma = -x + z\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha = -2x - y + 2z + x = -x - y + 2z \\ \beta = 2x + y - 2z \\ \gamma = -x + z\end{cases}$$

8. $u = (2x + y - 2z)a + (-x - y + 2z)b + (-x + z)c$
$$u = (-x - y + 2z)a + (2x + y - 2z)b + (-x + z)c$$

Allez à : Exercice 21

Correction exercice 22.

1. Une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 est liée, ce n'est pas une base.
2. Pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(2, -1, -1) + \beta(-1,2,3) + \gamma(1,4,7) + \delta(1,1,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases}2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 4\gamma + \delta = 0 \\ -\alpha + 3\beta + 7\gamma + 2\delta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2 + L_1 \\ L_3 - L_2 \end{matrix}\begin{cases}2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 3\beta + 9\gamma + 3\delta = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta + 3\gamma + \delta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha - (-3\gamma - \delta) + \gamma + \delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha + 4\gamma + 2\delta = 0 \\ \beta = -3\gamma - \delta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -2\gamma - \delta \\ \beta = -3\gamma - \delta\end{cases}$$

Donc pour tout α, β, γ et δ réels

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (-2\gamma - \delta)a + (-3\gamma - \delta)b + \gamma c + \delta d = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \gamma(-2a - 3b + c) + \delta(-a - b + d) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Ce qui montre que $-2a-3b+c=0_{\mathbb{R}^3}$ et que $-a-b+d=0_{\mathbb{R}^3}$, autrement dit

$$c=2a+3d \quad \text{et} \quad d=a+b$$

Par conséquent

$$E=Vect(a,b,c,d)=Vect(a,b,2a+3d,a+b)=Vect(a,b)$$

(a,b) est une famille génératrice de E, les vecteurs a et b ne sont pas proportionnels donc (a,b) est libre, c'est une base de E.

3.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in E \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, x=\alpha a+\beta b \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \alpha(2,-1,-1)+\beta(-1,2,3)$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta=x_1 \\ -\alpha+2\beta=x_2 \\ -\alpha+3\beta=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2+L_1 \\ L_3-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta=x_1 \\ 3\beta=2x_2+x_1 \\ \beta=x_3-x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 3L_3-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha-\beta=x_1 \\ 3\beta=2x_2+x_1 \\ 0=3(x_3-x_2)-(2x_2+x_1)=-x_1-5x_2+3x_3 \end{cases}$$

Une équation caractérisant E est $-x_1-5x_2+3x_3=0$

4. $e_1=(1,0,0)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant E donc $e_1\notin E$ et (a,b) est libre donc (a,b,e_1) est une famille libre à 3 élément dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de dimension 3, c'est une base.

Allez à : Exercice 22

Correction exercice 23.

Première partie

1.

$$u=(x,y,z,t)\in E\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-2y+2z+t=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ -3y+z+2t=0 \\ -2y+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=-y \\ t=2y \end{cases}$$

Donc $u=(2y,y,-y,2y)=y(2,1,-1,2)=ya$

2. a n'est pas le vecteur nul et engendre E, c'est une base de E et $\dim(E)=1$Soit $e_1=(1,0,0,0)$, $e_1\notin E$ car les composantes de e_1 ne vérifient pas les équations caractérisant E. Donc (a,e_1) est libre.

$u=(x,y,z,t)\in Vect(a,e_1)$ si et seulement s'ils existent α et β réels tels que :

$$u=\alpha a+\beta e_1\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ \alpha=y \\ -\alpha=z \\ 2\alpha=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2-L_1 \\ 2L_3+L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ -\beta=2y-x \\ \beta=2z+x \\ -\beta=t-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_3+L_2 \\ L_4-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ -\beta=2y-x \\ 2z+x+2y-x=0 \\ t-x-(2y-x)=0 \end{cases}$$

Donc $Vect(a,e_1)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, y+z=0 \text{ et } -2y+t=0\}$

Soit $e_2=(0,1,0,0)$, $e_2\notin Vect(a,e_1)$ car les composantes de e_2 ne vérifient pas les équations caractérisant $Vect(a,e_1)$ et (a,e_1) est libre donc (a,e_1,e_2) est libre.

$u=(x,y,z,t)\in Vect(a,e_1,e_2)$ si et seulement s'ils existent α, β et γ réels tels que :

$$u=\alpha a+\beta e_1+\gamma e_2\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ \alpha+\gamma=y \\ -\alpha=z \\ 2\alpha=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 2L_2-L_1 \\ 2L_3+L_1 \\ L_4-L_1 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ -\beta+2\gamma=2y-x \\ \beta=2z+x \\ -\beta=t-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_3+L_2 \\ L_4-L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ -\beta+2\gamma=2y-x \\ 2\gamma=2z+2y \\ -2\gamma=t-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4+L_3 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha+\beta=x \\ -\beta+2\gamma=2y-x \\ 2\gamma=2z+x+2y-x \\ 0=t+2z \end{cases}$$

Donc $Vect(a,e_1,e_2)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, 2z+t=0\}$

Soit $e_3=(0,0,1,0)$, $e_3\notin Vect(a,e_1,e_2)$ car les composantes de e_3 ne vérifient pas l' équation caractérisant $Vect(a,e_1,e_2)$ et (a,e_1,e_2) est libre donc (a,e_1,e_2,e_3) est libre, comme cette famille a quatre vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 23

Deuxième partie

3. $2\times 0+6\times 0+7\times 0-0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^4}\in F$.
Soient $u=(x,y,z,t)\in F$ et $u'=(x',y',z',t')\in F$, on a alors
$2x+6y+7z-t=0$ et $2x'+6y'+7z'-t'=0$. Soient λ et λ' deux réels.
$$\lambda u+\lambda' u'=\lambda(x,y,z,t)+\lambda(x',y',z',t')=(\lambda x+\lambda' x',\lambda y+\lambda' y',\lambda z+\lambda' z',\lambda t+\lambda' t')$$
$$\begin{aligned}2(\lambda x+\lambda' x')+6(\lambda y+\lambda' y')+7(\lambda z+\lambda' z')-(\lambda t+\lambda' t')\\=\lambda(2x+6y+7z-t)+\lambda(2x'+6y'+7z'-t')=0\end{aligned}$$
Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
4. $u=(x,y,z,t)\in F\Leftrightarrow u=(x,y,z,t)\ et\ t=2x+6y+7z\Leftrightarrow u=(x,y,z,2x+6y+7z)$
Donc $u=(x,y,z,2x+6y+7z)=x(1,0,0,2)+y(0,1,0,6)+z(0,0,1,7)$
$u_0=(1,0,0,2)$, $u_1=(0,1,0,6)$ et $u_2=(0,0,1,7)$, (u_0,u_1,u_3) est une famille génératrice de F.
Il reste à montrer que cette famille est libre :
$$\alpha(1,0,0,2)+\beta(0,1,0,6)+\gamma(0,0,1,7)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\\2\alpha+6\beta+7\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\\beta=0,\\\gamma=0\end{array}\right.$$
Cette famille est bien libre, c'est une base de F.
5. $\dim(E)=1$ et $\dim(F)=3$ donc $\dim(E)+\dim(F)=4=\dim(\mathbb{R}^4)$
Comme $2\times 2+6\times 1+7\times(-1)-2=1\neq 0$, $a=(2,1,-1,2)\notin F$, $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$
On a alors $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 23

Troisième partie

6. Comme $2\times 1+6\times 1+7\times(-1)-1=0$, $b\in F$.
Comme $2\times(-1)+6\times(-2)+7\times 3-7=0$, $c\in F$.
Comme $2\times 4+6\times 4+7\times(-5)-(-3)=0$, $d\in F$.
$$\alpha b+\beta c+\gamma d=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+4\gamma=0\\\alpha-2\beta+4\gamma=0\\-\alpha+3\beta-5\gamma=0\\\alpha+7\beta-3\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{array}\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+4\gamma=0\\-\beta=0\\2\beta-\gamma=0\\8\beta-7\gamma=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{array}\right.$$
Donc (b,c,d) est une famille libre dans un espace de dimension 3 ($\dim(F)=3$), c'est une base de F.
7. Soit $u=(x,y,z,t)$ avec $2x+6y+7z-t=0$
$$\alpha b+\beta c+\gamma d=u\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{array}\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+4\gamma=x\\\alpha-2\beta+4\gamma=y\\-\alpha+3\beta-5\gamma=z\\\alpha+7\beta-3\gamma=t\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{array}{c}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\\L_4+L_1\end{array}\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+4\gamma=x\\-\beta=-x+y\\2\beta-\gamma=x+z\\8\beta-7\gamma=-x+t\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}\\\\L_3+2L_2\\L_4+8L_2\end{array}\left\{\begin{array}{c}\alpha-\beta+4\gamma=x\\\beta=x-y\\-\gamma=-x+2y+z\\-7\gamma=-9x+8y+t\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\begin{array}{c}\\\\\\L_4-7L_3\end{array}\left\{\begin{array}{c}\alpha=\beta-4\gamma+x\\\beta=x-y\\\gamma=x-2y-z\\0=-9x+8y+t-7(-x+2y+z)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha=x-y-4(x-2y-z)+x\\\beta=x-y\\\gamma=x-2y-z\\0=-2x-6y-7z+t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha=-2x+7y+4z\\\beta=x-y\\\gamma=x-2y-z\\0=0\end{array}\right.$$
Donc pour tout $u=(x,y,z,t)\in F$ avec $2x+6y+7z-t=0$

$$u=(-2x+7y+4z)b+(x-y)c+(x-2y-z)d$$

Allez à : Exercice 23

Correction exercice 24.

1.
$$u=(x,y,z,t)\in E\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\left\{\begin{matrix}x+y+z+t=0\\x+2y-z+t=0\\-x-y+2z+2t=0\end{matrix}\right.\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3+L_1\end{matrix}\left\{\begin{matrix}x+y+z+t=0\\y-2z=0\\3z+3t=0\end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+y+z+t=0\\y=2z\\t=-z\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x+2z+z-z=0\\y=2z\\t=-z\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=-2z\\y=2z\\t=-z\end{matrix}\right.$$

Donc $u=(-2z,2z,z,-z)=z(-2,2,1,-1)$

On pose $u_0=(-2,2,1,-1)$ et $E=vect\,(u_0)$, E est la droite engendrée par le vecteur u_0.

$$u=(x,y,z,t)\in F\Leftrightarrow x+3y+4t=0\Leftrightarrow x=-3y-4t$$

Donc $u=(-3y-4t,y,z,t)=y(-3,1,0,0)+z(0,0,1,0)+t(-4,0,0,1)$

On appelle $u_1=(-3,1,0,0)$, $u_2=(0,0,1,0)$ et $u_3=(-4,0,0,1)$ et $F=Vect(u_1,u_2,u_3)$

(u_1,u_2,u_3) est une famille génératrice de F, il reste à montrer qu'elle est libre.

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha(-3,1,0,0),+\beta(0,0,1,0)+\gamma(-4,0,0,1)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}-3\alpha-4\gamma=0\\\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{matrix}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{matrix}\right.$$

(u_1,u_2,u_3) est libre (et génératrice de F) c'est donc une base de F.

2. $u_0=(-2,2,1,-1)$ vérifie

$$-2+3\times 2+4\times 1=0$$

Ce qui montre que $u_0\in F$, par conséquent $E\subset F$, et donc $E\cap F=E\neq\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, E et F ne sont pas en somme directe.

3. $a=(1,3,0,4)$

$$1+3\times 3+4\times 4=26\neq 0$$

Donc $a\notin F$, par conséquent $G\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, d'autre part

$$\dim(G)+\dim(F)=1+3=4=\dim(\mathbb{R}^4)$$

On a $G\oplus F=\mathbb{R}^4$

Allez à : Exercice 24

Correction exercice 25.

1. $0+2\times 0-3\times 0=0$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E$.

Soient $u=(x_1,x_2,x_3)\in E$ et $u'=(x_1',x_2',x_3')\in E$ alors

$$x_1+2x_2-3x_3=0\quad et\quad x_1'+2x_2'-3x_3'=0$$

Pour tout λ et λ' réels :

$$\lambda u+\lambda' u'=(\lambda x_1+\lambda' x_1',\lambda x_2+\lambda x_2',\lambda x_3+\lambda' x_3')$$

$$\lambda x_1+\lambda' x_1'+2(\lambda x_2+\lambda x_2')-3(\lambda x_3+\lambda' x_3')=\lambda(x_1+2x_2-3x_3)+\lambda'(x_1'+2x_2'-3x_3')=0$$

Donc

$$\lambda u+\lambda' u'\in E$$

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$u=(x_1,x_2,x_3)\in E\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}u=(x_1,x_2,x_3)\\x_1=-2x_2+3x_3\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}u=(-2x_2+3x_3,x_2,x_3)\\x_1=-2x_2+3x_3\end{matrix}\right.$$

$$u=(-2x_2+3x_3,x_2,x_3)=x_2(-2,1,0)+x_3(3,0,1)$$

$b=(-2,1,0)$ et $c=(3,1,0)$ sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, donc $\dim(E)=2$.

2. $1+2\times 2-(-3)\times 3=14\neq 0$ donc $a\notin E$, par conséquent $F\cap E=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, comme
$$\dim(E)+\dim(F)=2+1=3=\dim(\mathbb{R}^3)$$
On a $E\oplus F=\mathbb{R}^3$

Allez à : Exercice 25

Correction exercice 26.

1.
$$u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ x_1=-x_3\\ x_2=-x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=(-x_3,-x_4,x_3,x_4)\\ x_1=-x_3\\ x_2=-x_4\end{cases}$$
$$u=(-x_3,-x_4,x_3,x_4)=x_3(-1,0,1,0)+x_4(0,-1,0,1)$$
$u_4=(-1,0,1,0)$ et $u_5=(0,-1,0,1)$ sont deux vecteurs non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E, par conséquent $\dim(E)=2$.

2. Il est clair que $u_1+u_2=2u_3$ donc la famille (u_1,u_2,u_3) est liée.
$$F=Vect(u_1,u_2,u_3)=Vect\left(u_1,u_2,\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2\right)=Vect(u_1,u_2)$$
u_1 et u_2 sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre F, c'est une base de F, donc $\dim(F)=2$.
Attention certain d'entre vous on écrit (u_1,u_2,u_3) ne sont pas proportionnels donc (u_1,u_2,u_3) est une famille libre, c'est complètement faux, ce résultat est vrai pour deux vecteurs.

3. $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F$ $\Leftrightarrow$il existe α et β réels tels que $u=\alpha u_1+\beta u_2$
$$u=\alpha u_1+\beta u_2\Leftrightarrow\{\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,-1,1,-1)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x_1\\ \alpha-\beta=x_2\\ \alpha+\beta=x_3\\ \alpha-\beta=x_4\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\\L_4-L_2\end{matrix}\begin{cases}\alpha+\beta=x_1\\ -2\beta=-x_1+x_2\\ 0=-x_1+x_3\\ 0=-x_2+x_4\end{cases}$$
Donc
$$F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4,-x_1+x_3=0\ \ et\ -x_2+x_4=0\}$$

4. $E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2)$

Donc la famille (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille génératrice de $E+F$.

Remarques :

a. La réponse $E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2,u_3)$ est bonne aussi.
b. On pouvait penser à montrer que (u_4,u_5,u_1,u_2) était libre (c'est le cas) mais c'est totalement inutile (si on avait demandé de trouver une base alors là, oui, il fallait montrer que cette famille était libre).
Toutefois de montrer que cette (u_4,u_5,u_1,u_2) est libre permettait de montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$, parce que si une base de E, « collée » à une base de F donne une famille libre, on a $E+F=E\oplus F$, et comme (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ à 4 vecteurs, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^4$, autrement dit $E\oplus F=\mathbb{R}^4$. Ce n'est pas là peine d'en écrire autant, il suffit de dire que puisque (u_4,u_5,u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^4$ (libre plus 4 vecteurs) alors $E\oplus F=\mathbb{R}^4$.
Mais il y avait beaucoup plus simple pour montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ (voir question 5°)).
c. Attention si on écrit (u_4,u_5,u_1,u_2) ne sont pas proportionnels donc (u_4,u_5,u_1,u_2) est une famille libre, c'est complètement faux, ce résultat n'est vrai que pour deux vecteurs.
d. Regardons ce que l'on peut faire et ne pas faire
$$E+F=Vect(u_4,u_5,u_1,u_2)=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_2+e_3+e_4,e_1-e_2+e_3-e_4)$$

Çà c'est bon. Mais ensuite il faut simplifier correctement

$$\begin{aligned}E+F&=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_2+e_3+e_4+(e_1-e_2+e_3-e_4),e_1-e_2+e_3-e_4)\\&=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,2e_1+2e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\&=Vect(-e_1+e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\&=Vect(-e_1+e_3+(e_1+e_3),-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\&=Vect(2e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\\&=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1+e_3,e_1-e_2+e_3-e_4)\end{aligned}$$

Et là on retombe sur une situation habituelle, comme e_3 est tout seul, on peut le simplifier partout :

$$\begin{aligned}E+F&=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1,e_1-e_2-e_4)=Vect(e_3,-e_2+e_4,e_1,-e_2-e_4)\\&=Vect(e_3,-e_2+e_4+(-e_2-e_4),e_1,-e_2-e_4)=Vect(e_3,-2e_2,e_1,-e_2-e_4)\\&=Vect(e_3,e_2,e_1,-e_2-e_4)=Vect(e_3,e_2,e_1,-e_4)=Vect(e_3,e_2,e_1,e_4)=\mathbb{R}^4\end{aligned}$$

On peut éventuellement se servir de cela pour montrer que $E\oplus F=\mathbb{R}^4$ (il reste à dire que la somme des dimension de E et de F est 4) mais ce n'est pas ce qui est demandé.

5. $\dim(E)+\dim(F)=2+2=4=\dim(\mathbb{R}^4)$

$$u\in E\cap F\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_2+x_4=0\\-x_1+x_3=0\\-x_2+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=0\\x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow u=0_{\mathbb{R}^4}$$

Donc $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$

Par conséquent $E\oplus F=\mathbb{R}^4$

Autre méthode :

On aurait pu montrer que (u_1,u_2,u_3,u_4) était une famille libre.

Allez à : Exercice 26

Correction exercice 27.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F_1\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2=-2x_1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1+x_3+x_4=0\\x_2=-2x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=x_1-x_4\\x_2=-2x_1\end{cases}$$

Donc

$$x=(x_1,-2x_1,x_1-x_4,x_4)=x_1(1,-2,1,0)+x_4(0,0,-1,1)$$

On pose $c=(1,-2,1,0)$ et $d=(0,0,-1,1)$

Ces deux vecteurs engendrent F_1, ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, par conséquent (c,d) est une base de F_1.

2.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_2+x_4=0\\x_1+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_4=-x_2\\x_3=-x_1\end{cases}$$

Donc

$$x=(x_1,x_2,-x_1,-x_2)=x_1(1,0,-1,0)+x_2(0,1,0,-1)$$

On pose $e=(1,0,-1,0)$ et $f=(0,1,0,-1)$

Ces deux vecteurs engendrent F_2, ils ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre, par conséquent (e,f) est une base de F_2.

3. Première méthode

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in F_1\cap F_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2=0\\ x_2+x_4=0\\ x_1+x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2=0\\ x_4=-x_2\\ x_3=-x_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_1+x_2=0\\ 2x_1+x_2=0\\ x_4=-x_2\\ x_3=-x_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0\\ 2x_1+x_2=0\\ x_4=-x_2\\ x_3=-x_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-2x_1\\ x_3=-x_1\\ x_4=2x_1\end{cases}$$

Donc $x=(x_1,-2x_1,-x_1,2x_1)=x_1(1,-2,-1,2)$

Cela montre que $F_1\cap F_2=Vect\big((1,-2,-1,2)\big)$

On n'a pas $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^4$

Deuxième méthode

On rappelle que $F_1\oplus F_2=\mathbb{R}^4 \Leftrightarrow (c,d,e,f)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$$\alpha c+\beta d+\gamma e+\delta f=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0\\ -2\alpha+\delta=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ -\beta-\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\alpha\\ \delta=2\alpha\\ \alpha+\beta+\alpha=0\\ \beta+\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma=-\alpha\\ \delta=2\alpha\\ \beta=-2\alpha\\ 0=0\end{cases}$$

Cela n'entraine pas que $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$.

(c,d,e,f) est une famille liée ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

4.

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta-2\gamma=0\\ \alpha+\beta+\gamma-\delta=0\\ \alpha-\beta+\delta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2-L_1\\ L_3-L_1\\ L_4-L_1\end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0\\ -2\beta-3\gamma=0\\ -\delta=0\\ -2\beta-\gamma-\delta=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0\\ -2\beta-3\gamma=0\\ \delta=0\\ -2\beta-\gamma=0\end{cases}$$

En faisant la différence des lignes L_2 et L_4, on a $\gamma=0$, le reste s'en déduit $\alpha=\beta=\delta=0$.

(a,b,c,d) est une famille libre dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

5. Une base de E « collée » à une base de F_1 est une base de $\mathbb{R}^4$ donc on a $E\oplus F_1=\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 27

Correction exercice 28.

1. Soit $u=(x,y,z,t)\in E$, $x=y-z+t$ donc

$$u=(y-z+t,y,z,t)=y(1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(1,0,0,1)$$

Autrement dit

$$E=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4)$$

Ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4)$ est une famille génératrice de E, il reste à montrer que c'est une famille libre. Soient α,β et γ trois réels

$\alpha(e_1+e_2)+\beta(-e_1+e_3)+\gamma(e_1+e_4)=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(1,1,0,0)+\beta(-1,0,1,0)+\gamma(1,0,0,1)=(0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Par conséquent $(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4)$ est libre, c'est donc une base de E.

Soit $u=(x,y,z,t)\in F$, $x=-y-z-t$ donc

$$u=(-y-z-t,y,z,t)=y(-1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(-1,0,0,1)$$

Autrement dit

$$E=vect(-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4)$$

Ce qui montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$(-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4)$ est une famille génératrice de F, il reste à montrer que c'est une famille libre. Soient α,β et γ trois réels

$$\alpha(-e_1+e_2)+\beta(-e_1+e_3)+\gamma(-e_1+e_4)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow \alpha(-1,1,0,0)+\beta(-1,0,1,0)+\gamma(-1,0,0,1)$$

$$=(0,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha-\beta-\gamma=0\\ \alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Par conséquent $(-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4)$ est libre, c'est donc une base de F.

Soit $u=(x,y,z,t)\in H$, $u=(x,2x,3x,4x)=x(1,2,3,4)$

Donc

$$H=vect(e_1+2e_2+3e_3+4e_4)$$

Il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, c'est la droite engendrée par $e_1+2e_2+3e_3+4e_4$.

2.

$$E+F=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4,-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4)$$

On peut « simplifier » par $-e_1+e_3$

$$=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4,-e_1+e_2,-e_1+e_4)$$
$$=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4,-e_1+e_2,-e_1+e_4+e_1+e_4)$$
$$=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4,-e_1+e_2,2e_4)$$
$$=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1+e_4,-e_1+e_2,e_4)$$
$$=vect(e_1+e_2,-e_1+e_3,e_1,-e_1+e_2,e_4)=vect(e_2,-e_1+e_3,e_1,-e_1,e_4)$$
$$=vect(e_2,e_3,e_1,e_4)=\mathbb{R}^4$$

3. $(1,2,3,4)$ ne vérifie pas l'équation caractérisant E car $1-2+3-4=-2\neq 0$ donc $E\cap H=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$$E+H=vect(-e_1+e_2,-e_1+e_3,-e_1+e_4,e_1+2e_2+3e_3+4e_4)$$

Allez à : Exercice 28

Correction exercice 29.

$$u_1+u_2=3u_3\Leftrightarrow u_3=\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}u_2$$

Donc

$$E=Vect(u_1,u_2,u_3,u_4)=Vect\left(u_1,u_2,\frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}u_2,u_4\right)=Vect(u_1,u_2,u_4)$$

Est-ce que la famille (u_1,u_2,u_4) est libre, il n'y a pas moyen d'en être sur sauf en faisant le calcul suivant :

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\beta-\gamma=0\\ \alpha-\beta-2\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\2L_2-L_1\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\ 3\beta-3\gamma=0\\ -3\beta-\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3+L_2\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=0\\ 3\beta-3\gamma=0\\ -4\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Cette famille est libre, c'est une sous-famille libre de (u_1,u_2,u_3,u_4) qui engendre E.

Allez à : Exercice 29

Correction exercice 30.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E\Leftrightarrow\begin{cases}x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\\ x_1-x_2=0\\ x_3-x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=(x_2,x_2,x_4,x_4)\\ x_1=x_2\\ x_3=x_4\end{cases}$$

$$x=(x_2,x_2,x_4,x_4)=x_2(1,1,0,0)+x_4(0,0,1,1)$$

On pose $a=(1,1,0,0)$ et $b=(0,0,1,1)$

$E=Vect(a,b)$ ce qui entraine que $\{a,b\}$ est une famille génératrice de E, et d'autre part $\{a,b\}$ est une famille libre car ces vecteurs ne sont pas proportionnels, donc $\{a,b\}$ est une base de E.

2. Soit $c=(1,0,0,0)\notin E$ car les composantes de c ne vérifient pas les équations caractérisant E.
   $\{a,b\}$ est libre dans E et $c\notin E$ donc $\{a,b,c\}$ est libre.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in Vect(a,b,c)\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, x=\alpha a+\beta b+\gamma c$$

$$x=\alpha a+\beta b+\gamma c\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=\alpha(1,1,0,0)+\beta(0,0,1,1)+\gamma(1,0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\alpha+\gamma\\ x_2=\alpha\\ x_3=\beta\\ x_4=\beta\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\alpha+\gamma\\ x_2=\alpha\\ x_3=\beta\\ x_4-x_3=0\end{cases}$$

Donc $Vect(a,b,c)=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, x_4-x_3=0\}$

Soit $d=(0,0,0,1)$, $d\notin Vect(a,b,c)$ car les composantes de d ne vérifient pas $x_3-x_4=0$.

$\{a,b,c\}$ est libre et $d\notin Vect(a,b,c)$ donc $\{a,b,c,d\}$ est une famille libre, elle a 4 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

Allez à : Exercice 30

Correction exercice 31.

1.

$$\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2=0\Leftrightarrow \alpha\frac{1}{2}(X-1)(X-2)-\beta X(X-2)+\gamma\frac{1}{2}X(X-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}(X^2-3X+2)-\beta(X^2-2X)+\frac{\gamma}{2}(X^2-X)=0\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}\right)X^2+\left(-\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}\right)X+\alpha$$

$$=0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}=0\\ -\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}=0\\ \alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\beta+\frac{\gamma}{2}=0\\ +2\beta-\frac{\gamma}{2}=0\\ \alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=2\beta\\ \gamma=4\beta\\ \alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha=0\end{cases}$$

La famille (P_0,P_1,P_2) est une famille libre de trois éléments dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On cherche α, β et γ (en fonction de a, b et c) tels que : $aX^2+bX+c=\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2$
   En reprenant le calcul ci-dessus, il faut résoudre le système :

$$\begin{cases}\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}=a\\ -\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}=b\\ \alpha=c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=c\\ \frac{c}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}=a\\ -\frac{3c}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=c\\ -\beta+\frac{\gamma}{2}=a-\frac{c}{2}\\ 2\beta-\frac{\gamma}{2}=b+\frac{3c}{2}\end{cases}\Leftrightarrow_{L_3+L_2}\begin{cases}\alpha=c\\ -\beta+\frac{\gamma}{2}=a-\frac{c}{2}\\ \beta=a+b+c\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=c\\ \frac{\gamma}{2}=a-\frac{c}{2}+a+b+c\\ \beta=a+b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=c\\ \gamma=4a+2b+c\\ \beta=a+b+c\end{cases}$$

3. On cherche a, b et c (en fonction de α, β et γ) tels que : $aX^2+bX+c=\alpha P_0+\beta P_1+\gamma P_2$

$$\begin{cases}a=\frac{\alpha}{2}-\beta+\frac{\gamma}{2}\\ b=-\frac{3\alpha}{2}+2\beta-\frac{\gamma}{2}\\ c=\alpha\end{cases}$$

C'était déjà fait.

4. Il est préférable d'exprimer un tel polynôme dans la base (P_0, P_1, P_2), autrement dit on cherche α, β et γ tels que $R = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$ vérifie $R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.
$P_0(0) = 1$, $P_1(0) = 0$ et $P_2(0) = 0$ donc $\alpha = A$
$P_0(1) = 0$, $P_1(1) = 1$ et $P_2(1) = 0$ donc $\beta = B$
$P_0(2) = 0$, $P_1(2) = 0$ et $P_2(2) = 1$ donc $\gamma = C$
Il n'y a qu'un polynôme $R = AP_0 + BP_1 + CP_2$
Ensuite, si on veut on peut exprimer R dans la base canonique (mais ce n'est pas demandé dans l'énoncé)

$$R = aX^2 + bX + c = \left(\frac{A}{2} - B + \frac{C}{2}\right)X^2 + \left(-\frac{3A}{2} + 2B - \frac{C}{2}\right)X + C$$

Allez à : Exercice 31

Correction exercice 32.

1. Soient α, β, γ et δ quatre réels.

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 + \delta P_4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha(X^3 + X^2 + X + 1) + \beta(X^3 + 2X^2 + 3X + 4) + \gamma(3X^3 + X^2 + 4X + 2) + \delta(10X^3 + 4X^2 + 13X + 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta)X^3 + (\alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta)X^2 + (\alpha + 3\beta + 4\gamma + 13\delta)X + \alpha + 4\beta + 2\gamma + 7\delta = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma + 13\delta = 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma + 7\delta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta = 0 \\ 2\beta + \gamma + 3\delta = 0 \\ 3\beta - \gamma - 3\delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta = 0 \\ 5\gamma + 15\delta = 0 \\ 5\gamma + 15\delta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta - 2\gamma - 6\delta = 0 \\ \gamma = -3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma + 10\delta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3\delta \end{cases}$$

Donc la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est liée. De plus si on prend $\delta = -1$, $\alpha = 1$ et $\gamma = 3$, donc

$$P_1 + 3P_3 - P_4 = 0$$

2.

$$Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) = Vect(P_1, P_2, P_3, P_1 + 3P_3) = Vect(P_1, P_2, P_3)$$

Il reste à vérifier que (P_1, P_2, P_3) est libre, soit on voit qu'il s'agit du même calcul que ci-dessus avec $\delta = 0$, et par conséquent $\alpha = \beta = \gamma = 0$, soit on le refait

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha(X^3 + X^2 + X + 1) + \beta(X^3 + 2X^2 + 3X + 4) + \gamma(3X^3 + X^2 + 4X + 2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta + 3\gamma)X^3 + (\alpha + 2\beta + \gamma)X^2 + (\alpha + 3\beta + 4\gamma)X + \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 3L_2 \end{matrix}\begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ 5\gamma = 0 \\ 5\gamma = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

(P_1, P_2, P_3) est une famille libre et génératrice de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$
Une base de $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4)$ est (P_1, P_2, P_3)

Allez à : Exercice 32

Correction exercice 33.

1. Le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est le polynôme nul, en 1 ce polynôme vaut 0, le vecteur nul de $\mathbb{R}_2[X]$ est dans E.
   Soit $P_1 \in E$ et $P_2 \in E$, donc $P_1(1) = 0$ et $P_2(1) = 0$.
   Pour tout λ_1 et λ_2 deux réels,
   $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1) = \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 = 0$$
   Donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$
   E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in E$,
   $$P(1) = 0 \Leftrightarrow a \times 1^2 + b \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$$
   Donc
   $$P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$$
   $X^2 - 1$ et $X - 1$ sont deux polynômes non proportionnels, ils forment une famille libre qui engendre E, c'est une base de E. $\dim(E) = 2$.

Allez à : Exercice 33

Correction exercice 34.

1. Le polynôme nul Θ vérifie $\Theta(-1) = \Theta(1) = 0$, donc $\Theta \in E$.
   Soient P_1 et P_2 deux polynômes de E et soient λ_1 et λ_2 deux réels
   $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(-1) = \lambda_1 P_1(-1) + \lambda_2 P_2(-1) = 0$$
   Car $P_1(-1) = 0$ et $P_2(-1) = 0$,
   $$(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1) = \lambda_1 P_1(1) + \lambda_2 P_2(1) = 0$$
   Car $P_1(1) = 0$ et $P_2(1) = 0$,
   Donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$, ce qui montre que E est un sous-espace-vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$
2. -1 et 1 sont racines de P donc il existe Q tel que $P = (X - 1)(X + 1)Q = (X^2 - 1)Q$
   Le degré de Q est 1, donc il existe deux réels a et b tels que
   $$P = (X^2 - 1)(aX + b) = aX(X^2 - 1) + b(X^2 - 1)$$
   $(X(X^2 - 1), X^2 - 1)$ est une famille génératrice de E, ces polynômes ne sont pas proportionnels, ils forment dond une famille libre et donc une base de E.

Allez à : Exercice 34

Correction exercice 35.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) + \beta \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0$$

Pour $x = \frac{\pi}{3}$,

$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \beta \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \gamma \sin(\pi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \gamma \sin(3x) = 0$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \alpha \sin(\pi) + \gamma \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \gamma = \alpha$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \sin(x) - \alpha \sin(2x) + \alpha \sin(3x) = 0$$

Pour $x = \frac{2\pi}{3}$

$$\alpha \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \alpha \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \alpha \sin(2\pi) = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$
Cette famille est libre.

Allez à : Exercice 35

Correction exercice 36.
Première méthode

$F \in Vect(f, g, h) \Leftrightarrow$ il existe α, β et γ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x)&=\alpha\cos(x)+\beta\cos(x)\cos(2x)+\gamma\sin(x)\sin(2x)\\&=\alpha\cos(x)+\beta\cos(x)\left(1-2\cos^2(x)\right)+2\gamma\sin^2(x)\cos(x)\\&=\alpha\cos(x)+\beta\cos(x)-2\beta\cos^3(x)+2\gamma\left(1-\cos^2(x)\right)\cos(x)\\&=(\alpha+\beta+2\gamma)\cos(x)+(-2\beta-2\gamma)\cos^3(x)\end{aligned}$$

Donc $F\in Vect(\cos\ ,\cos^3\ )$

Ce qui signifie que $Vect(f,g,h)\subset Vect(\cos\ ,\cos^3\ )$, l'inclusion dans l'autre sens l'inclusion est évidente donc

$$Vect(f,g,h)=Vect(\cos\ ,\cos^3\ )$$

Qui est évidemment un espace vectoriel de dimension 2.

Deuxième méthode

On cherche à savoir si la famille (f,g,h) est libre, si c'est le cas, il n'y a pas grand-chose à dire sur $Vect(f,g,h)$ sinon que c'est un espace de dimension 3.

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)+\beta\cos(x)\cos(2x)+\gamma\sin(x)\sin(2x)=0$$

Pour $x=\frac{\pi}{4}$

$$\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\beta\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\gamma\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\alpha+\gamma=0$$

Pour $x=0$

$$\alpha\cos(0)+\beta\cos(0)\cos(0)+\gamma\sin(0)\sin(0)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta=0$$

Donc $\gamma=-\alpha$ et $\beta=-\alpha$

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)-\alpha\cos(x)\cos(2x)+\alpha\sin(x)\sin(2x)=0$$

Ensuite, on a beau chercher, pour toutes les valeurs de x particulière, on trouve $0=0$.

$$\begin{aligned}&\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)-\alpha\cos(x)\cos(2x)+\alpha\sin(x)\sin(2x)=0\\\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\left(\cos(x)-\cos(x)\cos(2x)+\sin(x)\sin(2x)\right)=0\\\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\left(\cos(x)\left(1-\cos(2x)\right)+\sin(x)\,2\cos(\mathrm{x})\sin(\mathrm{x})\right)=0\\\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R},\qquad \alpha\cos(x)\left(1-\cos(2x)+2\sin^2(x)\right)=0\\\Leftrightarrow\ &\forall x\in\mathbb{R},\qquad 0=0\end{aligned}$$

Car $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$

La famille est donc liée, f et g ne sont pas proportionnelles donc la famille est libre et

$$Vect(f,g,h)=Vect(f,g)$$

Et $\dim\left(Vect(f,g,h)\right)=2$.

Remarque la famille (f,g) ne ressemble pas trop à la famille $(\cos\ ,\cos^3\ )$ mais dans un plan, je rappelle qu'il y a une infinité de base.

Allez à : Exercice 36

Correction exercice 37.

Soit $\theta_{\mathbb{R}}$ la fonction nulle

$$\theta_{\mathbb{R}}''(x)+x\theta_{\mathbb{R}}'(x)-x^2\theta_{\mathbb{R}}(x)=0+x\times 0-x^2\times 0=0$$

Donc $\theta_{\mathbb{R}}\in E$

Soient f et $g$deux fonctions de E. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)+xf'(x)-x^2f(x)=0\quad\text{ et }\quad g''(x)+xg'(x)-x^2g(x)=0$$

Pour tout réels λ et μ

$$\begin{aligned}&(\lambda f+\mu g)''(x)+x(\lambda f+\mu g)'(x)-x^2(\lambda f+\mu g)(x)\\&=\lambda f''(x)+\mu g''(x)+x\left(\lambda f'(x)+\mu g'(x)\right)-x^2\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)\\&=\lambda\left(f''(x)+xf'(x)-x^2f(x)\right)+\mu\left(g''(x)+xg'(x)-x^2g(x)\right)=0\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\lambda f+\mu g\in E$.

Par conséquent E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions.

Allez à : Exercice 37

Correction exercice 38. (Hors programme)

1. Pour S_1

Démontrons d'abord que si $p'\in\mathbb{Z}$, $q'\in\mathbb{N}^*$ et p' et q' tels que $p'+q'\sqrt{2}=0$ alors $p'=q'=0$

On pose $d=PGCD(p',q')$, $p'=dp$ et $q'=dq$

$$p+q\sqrt{2}=0\Rightarrow 2q^2=p^2\Leftrightarrow\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases}$$

$$p+q\sqrt{2}=0\Rightarrow p=-q\sqrt{2}\Rightarrow 2q^2=p^2$$

D'après le théorème de Gauss, (si p et q sont non nuls) p divise $2q^2$ et p est premier avec q^2 donc p divise 2. $p\in\{-2,-1,1,2\}$

Si $p=\pm 1$ alors $p^2=1$ et $2q^2=1$ ce qui n'est pas possible.

Si $p=\pm 2$ alors $p^2=4$ et $2q^2=4\Leftrightarrow q^2=2$, ce qui n'est pas possible.

Donc $p=0$ et $q=0$, par conséquent $p'=q'=0$.

La seule solution de $2q^2=p^2$ est $(p,q)=(0,0)$

Soient $r_1=\frac{p_1}{q_1}$ et $r_2=\frac{p_2}{q_2}$ deux rationnels non nuls. Donc $p_1\neq 0$, $p_2\neq 0$ (et bien sur $q_1\neq 0$ et $q_2\neq 0$) et rien n'empêche de prendre $p_1<0$ et $p_2>0$ (avec $q_1>0$ et $q_2>0$)

Montrons que $r_1\times 1+r_2\times\sqrt{2}=0\Rightarrow r_1=r_2=0$

$r_1\times 1+r_2\times\sqrt{2}=0\Rightarrow p_1q_2+p_2q_1\sqrt{2}=0$

On pose $p'=p_1q_2<0$ et $q'=p_2q_1>0$,

Donc $p'+q'\sqrt{2}=0$ et d'après la première partie $p'=q'=0$, ce qui est impossible si $r_1\neq 0$ et $r_2\neq 0$.

Donc $r_1=r_2=0$ et la famille est libre.

Pour S_2

$$r_1\times 1+r_2\times\sqrt{2}+r_3\sqrt{3}=0$$

Avec $r_1=\frac{p_1}{q_1}$, $r_2=\frac{p_2}{q_2}$ et $r_3=\frac{p_3}{q_3}$

$$r_1\times 1+r_2\times\sqrt{2}+r_3\sqrt{3}=0\Leftrightarrow p_1q_2q_3+p_2q_1q_3\sqrt{2}+p_3q_1q_2\sqrt{3}=0$$

On pose $a'=p_1q_2q_3$, $b'=p_2q_1q_3$ et $c'=p_3q_1q_2$

$$a'+b'\sqrt{2}+c'\sqrt{3}=0$$

Soit $d=PGCD(a,b,c)$, $a'=da$, $b'=db$ et $c'=dc$

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$$

Où a, b et c sont trois entiers premiers entre eux.

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}=-c\sqrt{3}\Rightarrow\left(a+b\sqrt{2}\right)^2=3c^2\Rightarrow a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}=3c^2$$

$$\Rightarrow a^2+2b^2-3c^2+2ab\sqrt{2}=0$$

On pose $p=a^2+2b^2-3c^2$ et $q=2ab$, d'après la question précédente : $p=0$ et $q=0$

Donc $ab=0$ et $a^2+2b^2-3c^3=0$

Si $a=0$, $2b^2-3c^3=0\Leftrightarrow 2b^2=3c^2$, d'après le théorème de Gauss, c divise $2b^2$ et c est premier avec b^2 (car 0, b et c sont trois entiers premiers entre eux entraine b et c sont premiers entre eux) donc c divise 2, par conséquent $c\in\{-2,-1,1,2\}$, soit $c^2=1$ alors $2b^2=3$ ce qui est impossible (le premier terme est paire et le second est impair). Le seul cas possible est $b=c=0$, soit $c^2=4$alors $2b^2=3\times 4\Leftrightarrow b^2=6$ ce qui est impossible aussi puisque 6 n'est pas un carré, dans ce cas aussi la seule solution est $b=c=0$.

Si $b=0$, $a^2-3c^2=0\Leftrightarrow a^2=3c^2$, on raccourcit la démonstration, toujours avec Gauss, a divise 3 donc si $a^2=1$, $3c^2=1$ est impossible et si $a^2=9$ alors $c^2=3$ ce qui est aussi impossible, bref, la seule solution est là encore $a=c=0$

Tout cela pour dire que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$ entraine $a=b=c=0$. Par conséquent $a'=b'=c'=0$, comme $a'=p_1q_2q_3$, $b'=p_2q_1q_3$ et $c'=p_3q_1q_2$ et que les q_i sont non nuls, alors $p_1=p_2=p_3=0$ et $r_1=r_2=r_3=0$, ce qui montre bien que S_2 est une famille $\mathbb{Q}$-libre.

2.

$$r_1u_1+r_2u_2=0\Leftrightarrow\frac{p_1}{q_1}\left(3+\sqrt{5},2+3\sqrt{5}\right)+\frac{p_2}{q_2}\left(4,7\sqrt{5}-9\right)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p_1q_2\left(3+\sqrt{5}\right)+p_2q_1\left(2+3\sqrt{5}\right)=0\\p_1q_2\left(2+3\sqrt{5}\right)+p_2q_1\left(\sqrt{5}-9\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(3+\sqrt{5}\right)+b\left(2+3\sqrt{5}\right)=0\\a\left(2+3\sqrt{5}\right)+b\left(\sqrt{5}-9\right)=0\end{cases}$$

Si on pose $a=p_1q_2$ et $b=p_2q_1$

$$r_1u_1+r_2u_2=0\Leftrightarrow\begin{cases}3a+2b+(a+3b)\sqrt{5}=0\\2a-9b+(3a+b)\sqrt{5}=0\end{cases}$$

Comme dans l'exercice précédent on montre que $(1,\sqrt{5})$ est une famille $\mathbb{Q}$-libre (c'est trop long, je suis très fatigué).

Donc $3a+2b+(a+3b)\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=0 \\ a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b=0 \\ a=-3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9b+2b=0 \\ a=-3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases}$

$a(2+3\sqrt{5})+b(\sqrt{5}-9)=0$ est vérifié pour $a=b=0$

Donc $p_1q_2=0$ et $p_2q_1=0$, comme $q_1\neq 0$ et $q_2\neq 0$, on a $p_1=p_2=0$ et donc $r_1=r_2=0$.

La famille (u_1,u_2) est $\mathbb{Q}$-libre.

$$\begin{aligned} 4u_1-(3+\sqrt{5})u_2 &= 4(3+\sqrt{5},2+3\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})(4,7\sqrt{5}-9) \\ &= \left(0,4(2+3\sqrt{5})-(3+\sqrt{5})(7\sqrt{5}-9)\right) \\ &= \left(0,8+12\sqrt{5}-(21\sqrt{5}-27+35-9\sqrt{5})\right) = (0,8+27-35+(12-21-9)\sqrt{5}) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

Il existe une relation entre ces deux vecteurs donc la famille est $\mathbb{R}$-liée.

3.

a. Pour tout α et β réels

$$\alpha v_1+\beta v_2=0 \Rightarrow \alpha(1-i,i)+\beta(2,-1+i)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(1-i)+2\beta=0 \\ \alpha i+\beta(-1+i)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta-\alpha i=0 \\ -\beta+(\alpha+\beta)i=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta=0 \;\; et \;\; -\alpha=0 \\ -\beta=0 \;\; et \;\; (\alpha+\beta)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

(v_1,v_2) est $\mathbb{R}$-libre

$$\begin{aligned} 2v_1-(1-i)v_2 &= 2(1-i,i)-(1-i)(2,-1+i) \\ &= \left(2(1-i)-(1-i)\times 2,2i-(1-i)(-1+i)\right)=(0,2i-2i)=(0,0) \end{aligned}$$

Il existe une relation entre ces deux vecteurs donc la famille est $\mathbb{C}$-liée.

b. Pour tout α,β,γ et δ réels

$$\alpha(1,0)+\beta(i,0)+\gamma(0,1)+\delta(0,i)=(0,0) \Rightarrow (\alpha+i\beta,\gamma+i\delta)=(0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+i\beta=0 \\ \gamma+i\delta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=\beta=0 \\ \gamma=\delta=0 \end{cases}$$

La famille S est libre. Si on sait que la dimension de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ est 4, c'est fini, parce qu'une famille libre à 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4 est une base. Sinon il est clair que pour tout vecteur $(\alpha+i\beta,\gamma+i\delta)$ de $\mathbb{C}^2$,

$$(\alpha+i\beta,\gamma+i\delta)=\alpha(1,0)+\beta(i,0)+\gamma(0,1)+\delta(0,i)$$

La famille S est génératrice, donc c'est une base.

$$v_1=(1-i,i)=(1,0)-(i,0)+(0,i)$$
$$v_2=(2,-1+i)=(2,0)-(0,1)+(0,i)$$

Allez à : Exercice 38