Pascal Lainé

Ensembles-Applications

Exercice 1 :

Soit $f: I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \qquad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2 \qquad f: [0,1] \to [0,2],\ x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^3 \qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x^3 \qquad k: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^4$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f: I \to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f: I \to K$ soit bijective.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit $f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Soient

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n \qquad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f\big(f(E)\big) = E$$

Montrer que f est surjective.

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Soit $f: E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une application
   (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
   (i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

4. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$

a. Montrer que f est injective ?
b. f est-elle surjective ?

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$
   c. $f \circ f = Id_E$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
$$f(1) = 4, \quad f(2) = 1 \quad, f(3) = 2, \quad f(4) = 2.$$
Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.

2. Soit $f: \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..

3. Est-ce que f est surjective ?

Allez à : Correction exercice 17 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. $I = [0,1]$ et $J = [-1,1]$.
2. $I = [-1,1]$ et $J = [0,1]$.
3. $I = [-1,1]$ et $J = [-1,1]$.
4. $I = [0,1]$ et $J = [0,1]$.

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

$f(-1) = f(1)$ donc f n'est pas injective.

-4 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = -4 \Leftrightarrow x^2 = -4$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. f n'est pas surjective.

Une fonction est bijective si et seulement si elle est injective et surjective donc cette fonction n'est pas bijective.

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto x^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble d'arrivée), il existe $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^*$, (celui de l'ensemble de départ) tel que : $y = f(x)$, en effet $f(x) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ donc f est surjective.

f est bijective.

$$f: [0,1] \to [0,2]$$
$$x \mapsto x^2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

Car $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. f est injective.

2 n'a pas d'antécédent, car $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $[0,1]$. f n'est pas surjective.

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^3$$

g est une fonction dérivable, $g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
La contraposée de $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ est $x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$
Supposons que $x_1 \neq x_2$, alors $x_1 < x_2$ (ou $x_2 < x_1$, ce que revient au même), on en déduit que $g(x_1) < g(x_2)$ car g est strictement croissante, par conséquent $g(x_1) \neq g(x_2)$, g est injective.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = g(x)$, g est surjective. Mais l'unicité du « x » fait que g est bijective donc il était inutile de montrer l'injectivité de g.

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x^3$$

On va étudier (sommairement) cette fonction et dresser son tableau de variation.
h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. $h'(x) = 2x + 3x^2 = x(2 + 3x)$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^3 » l'emporte sur le « x^2 ».

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les seules bijections de $E \subset \mathbb{R}$ sur $F \subset \mathbb{R}$ sont les fonctions strictement monotones dont l'image de E est F.
h n'est pas une bijection.
Comme $h(-1) = 0 = h(0)$, h n'est pas injective.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = h(x)$, et bien il n'y a pas unicité sinon h serait bijective.
Pour tout $y \in [0, \frac{4}{27}[$ il existe trois valeurs x tel que $y = h(x)$, pour $y = \frac{4}{27}$, il y en a deux pour les autres y n'a qu'un antécédent.

$$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + x^4$$

On va étudier cette fonction, k est dérivable et $k'(x) = 1 + 4x^3$

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$k\left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \times \frac{3}{4} = -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Le « x^4 » l'emporte sur le « x ».

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour tout $y > -\frac{3}{2^{\frac{8}{3}}}$, y admet deux antécédents, k est ni surjective ni injective.

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

1.
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$
Donc f est injective.
2. $K = f(I)$

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1.
$$f(1,2) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = f(2,1)$$
Donc f n'est pas injective.
2. $f(1,p) = 1 \times p = p$
Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(n,m) = (1,p)$ tel que $p = f(n,m)$
f est surjective.
3.
$$g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow (n_1,(n_1+1)^2) = (n_2,(n_2+1)^2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = n_2 \\ (n_1+1)^2 = (n_2+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2$$
Donc g est injective.
4. On va montrer que $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent. Supposons que
$$(1,1) = (n,(n+1)^2)$$
Alors
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = (n+1)^2 \end{cases}$$
Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} 1 = n \\ 1 = 2^2 \end{cases}$$
Ce qui est impossible donc $(1,1)$ n'admet pas d'antécédent, g n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

$$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1 = 2n_2 \Rightarrow n_1 = n_2$$
f est injective.
1 n'a pas d'antécédent car il n'existe pas d'entier naturel n tel que $1 = 2n$, f n'est pas surjective.
$g(0) = E\left(\frac{0}{2}\right) = E(0) = 0$ et $g(1) = E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, donc $g(0) = g(1)$ ce qui entraine que g n'est pas injective.
Pour tout $y = n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble d'arrivé) il existe $x = 2n \in \mathbb{N}$ (dans l'ensemble de départ) tel que :
$$g(x) = E\left(\frac{x}{2}\right) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n = y$$
g est surjective.
Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p)\big) = f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right) = f\big(E(p)\big) = f(p) = 2p = n$$
Si n est impaire, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$
$$f \circ g(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p+1)\big) = f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p+\frac{1}{2}\right)\right) = f(p) = 2p = n-1$$

$$f\circ g(n)=\begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair}\\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Que n soit paire ou impaire

$$g\circ f(n)=g\big(f(n)\big)=g(2n)=E\left(\frac{2n}{2}\right)=E(n)=n$$

$$g\circ f=id$$

Remarque :

Comme on le voit sur cet exemple, il ne suffit pas que $g\circ f=id$ pour que g soit la bijection réciproque de f. La définition de la bijection réciproque d'une fonction $f_1: E\to E$ est :

« S'il existe une fonction $f_2: E\to E$ telle que $f_1\circ f_2=f_2\circ f_1=id_E$ alors $f_2=f_1^{-1}$ » on a alors : f_1 et f_2 sont deux fonctions bijectives.

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

$f(E)\subset E$ donc $f\big(f(E)\big)\subset f(E)\subset E$, or $f\big(f(E)\big)=E$ donc $E\subset f(E)\subset E$, par conséquent $E=f(E)$ ce qui signifie que f est surjective.

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. Supposons que g existe, $f\circ g=Id_{\mathbb{N}}\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, f\big(g(n)\big)=n\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\big(g(n)\big)^2=n$

   Si n n'est pas un carré cela ne marche pas, par exemple si $n=2$, $\big(g(2)\big)^2=2$ donc $g(2)=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{N}$

   Il n'existe pas de fonction $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ telle que :$f\circ g=Id_{\mathbb{N}}$.
2. Supposons que h existe, $h\circ f=Id_{\mathbb{N}}\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h\big(f(n)\big)=n\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, h(n^2)=n$

   Les valeurs $h(p)$ prennent les valeurs qu'elles veulent sauf lorsque p est un carré auquel cas $h(p)=\sqrt{p}$, donnons une fonction h qui répond à la question :

   Si $p\neq n^2$ alors $h(p)=0$ et si $p=n^2$ alors $h(p)=\sqrt{p}=n$.

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

1. Si g existe alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f\big(g(n)\big)=n\Leftrightarrow 2g(n)=n$, si n est impair $g(n)\notin\mathbb{Z}$ donc il n'existe pas de fonction $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ telle que $f\circ g=Id_{\mathbb{Z}}$.

2. Si h existe alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $h\big(f(n)\big)=n\Leftrightarrow h(2n)=n$

   Soit h la fonction définie, pour tout $p\in\mathbb{Z}$, par $h(2p)=p$ et $h(2p+1)=0$ convient.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

On pose $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ et $F=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$, et bien sur tous les e_j sont distincts ainsi que tous les f_i.

On rappelle que le fait que f soit une application entraine que $\{f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n)\}\subset\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$

On suppose que f est injective, on va montrer que f est surjective.

On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas surjective alors f n'est pas injective.

Soit $f_i\in F$ et on suppose qu'il n'existe pas de $e_j\in E$ tel que $f_i=f(e_j)$ (f n'est pas surjective)

Donc $\{f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n)\}\subset\{f_1,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,f_n\}$, il y a n éléments dans le premier ensemble et $n-1$ dans le second, donc il existe j_1 et j_2, avec $j_1\neq j_2$ dans $\{1,2,\dots,n\}$ tels que $f\big(e_{j_1}\big)=f(e_{j_2})$, or $e_{j_1}\neq e_{j_2}$ donc f n'est pas injective.

On suppose que f est surjective et on va montrer que f est injective.
On va montrer la contraposée, c'est-à-dire que l'on va montrer que si f n'est pas injective alors f n'est pas surjective.
Si $f(e_i)=f(e_j)=u$ avec $e_i\neq e_j$ alors
$\{f(e_1),\dots,f(e_{i-1}),u,f(e_{i+1}),\dots,f(e_{j-1}),u,f(e_{j+1})\dots,f(e_n)\}\subset\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$, le premier ensemble a $n-1$ éléments et le second n donc il existe un f_j qui n'a pas d'antécédent, cela montre que f n'est pas surjective.
On a montré que $(i)\Leftrightarrow(ii)$, par définition $(iii)\Rightarrow(i)$ et $(iii)\Rightarrow(ii)$. Si on a (i) alors on a (ii) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii) de même si on a (ii) alors on a (i) et $(i)\ et\ (ii)$ entraine (iii). Ce qui achève de montrer les trois équivalences.

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

1. u et v sont surjectives donc $u(\mathbb{N})=\mathbb{Z}$ et $v(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$ par conséquent
$$u\circ v\circ u(\mathbb{N})=u\Big(v\big(u(\mathbb{N})\big)\Big)=u\big(v(\mathbb{Z})\big)=u(\mathbb{N})=\mathbb{Z}$$
Cela montre que $u\circ v\circ u$ est surjective.
$$u\circ v\circ u(x_1)=u\circ v\circ u(x_2)\Leftrightarrow u\Big(v\big(u(x_1)\big)\Big)=u\Big(v\big(u(x_2)\big)\Big)\Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big)=v\big(u(x_2)\big)$$
Car u est injective
$$u\circ v\circ u(x_1)=u\circ v\circ u(x_2)\Leftrightarrow v\big(u(x_1)\big)=v\big(u(x_2)\big)\Leftrightarrow u(x_1)=u(x_2)$$
Car v est injective
$$u\circ v\circ u(x_1)=u\circ v\circ u(x_2)\Leftrightarrow u(x_1)=u(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$$
Car u est injective
Finalement $u\circ v\circ u$ est injective et donc bijective (puisqu'elle est surjective).
2. 7 n'admet pas d'antécédent donc f n'est pas surjective.
$$f(a,b,c)=f(a',b',c')\Leftrightarrow 2^a3^b5^c=2^{a'}3^{b'}5^{c'}$$
L'unicité de la décomposition des entiers en produit de facteur premier entraine que $a=a'$, $b=b'$ et $c=c'$, autrement dit f est injective.
Donc f est injective et pas surjective.
3. $\varphi(n)=0\quad et\ \varphi(2n)=0$
Donc φ n'est pas injective.
$$\varphi(\mathbb{Z})=\{0,1,\dots,n-1\}\subsetneq\mathbb{N}$$
Donc φ n'est pas surjective.
4. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}$ on cherche s'il existe un unique couple $(u,v)\in\mathbb{Z}$ tel que

Premier cas $a\neq 0$

$$(x,y)=f(a,b)\Leftrightarrow(x,y)=(au+bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=au+bv+1\\y=cu+dv-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x-1=au+bv\\y+1=cu+dv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\cL_1-aL_2\end{matrix}\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=cbv-adv\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=(cb-ad)v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+bv\\c(x-1)-a(y+1)=-v\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=au+b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=-b\big(-c(x-1)+a(y+1)\big)+(x-1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=bc(x-1)-ab(y+1)+(x-1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}au=(bc+1)(x-1)-ab(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}au=ad(x-1)-ab(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=d(x-1)-b(y+1)\\v=-c(x-1)+a(y+1)\end{cases}$$

Si $a=0$, alors $bc=-1$, en particulier $b\neq 0$ et $\frac{1}{b}=-c$

$$(x,y)=f(0,b)\Leftrightarrow(x,y)=(bv+1,cu+dv-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=bv+1\\y=cu+dv-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{x-1}{b}\\y=cu+dv-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\y=cu-dc(x-1)-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\y=cu-dc(x-1)-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\cu=dc(x-1)+1+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\u=d(x-1)+\dfrac{1+y}{c}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=-c(x-1)\\u=d(x-1)-b(1+y)\end{cases}$$

Ce sont les mêmes formules que dans le cas où $a\neq 0$

Donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ il existe un unique couple

$$(u,v)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)\in\mathbb{Z}^2$$

tel que $(x,y)=f(u,v)$, f est bijective et

$$f^{-1}(x,y)=\big(d(x-1)-b(y+1),-c(x-1)+a(y+1)\big)$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1.

$$q_1\geq 2\Rightarrow 0<\frac{1}{q_1}\leq\frac{1}{2}\quad(1)$$

$$q_2\geq 2\Rightarrow 0<\frac{1}{q_2}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}\leq-\frac{1}{q_2}<0\quad(2)$$

En additionnant (1) et (2)

$$-\frac{1}{2}<\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}<\frac{1}{2}$$

2.

a. Pour tout $(p_1,q_1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $(p_2,q_2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$$f(p_1,q_1)=f(p_2,q_2)\Rightarrow p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}\Rightarrow\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}=p_2-p_1$$

D'après la première question cela montre que $p_2-p_1\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ or $p_2-p_1\in\mathbb{Z}$ donc $p_2-p_1=0$, autrement dit $p_1=p_2$, puis en reportant dans

$$p_1+\frac{1}{q_1}=p_2+\frac{1}{q_2}$$

Cela montre que $\frac{1}{q_1}=\frac{1}{q_2}$ et que $q_1=q_2$

Finalement

$$(p_1,q_1)=(p_2,q_2)$$

Ce qui montre que f est injective.

b. Regardons si $1\in\mathbb{Q}$ admet un antécédent, on suppose qu'il existe, on l'appelle (p,q)

$$p+\frac{1}{q}=1$$

Ce qui équivaut à

$$\frac{1}{q}=1-p$$

Mais $\frac{1}{q}\notin\mathbb{Z}$ et $1-p\in\mathbb{Z}$, ce qui est impossible. Par conséquent f n'est pas surjective.

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. Première méthode : raisonnons par récurrence

   On pose (H_n) il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.

   Regardons si (H_2) est vraie.

   Il y a 4 applications de I_2 dans I_n.

$$f_1(1)=1 \text{ et } f_1(2)=1$$
$$f_2(1)=1 \text{ et } f_2(2)=2$$
$$f_3(1)=2 \text{ et } f_3(2)=1$$
$$f_4(1)=2 \text{ et } f_4(2)=2$$

   Seules f_2 et f_3 sont injectives. Il y a $2=2(2-1)$ applications injectives de I_2 dans I_2.

   Montrons que $(H_n)\Rightarrow(H_{n+1})$

   Il y a $n(n-1)$ applications injectives de $\{0,1\}$ dans $\{0,1,\dots,n\}$.

   Supposons que $f(1)=n+1$ alors $f(2)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

   Supposons que $f(2)=n+1$ alors $f(1)\in\{1,\dots,n\}$ (pour que $f(1)\neq f(2)$), cela fait n applications injectives de plus.

   Au total, il y a $n(n-1)+n+n=n^2-n+n+n=n^2+n=n(n+1)$

   L'hypothèse est vérifiée.

   Conclusion pour tout $n\geq 2$, il y a $n(n-1)$ applications injectives de I_2 dans I_n.

   Deuxième méthode :

   Si $f(1)=k\in\{0,1,\dots,n\}$ alors $f(2)\in\{1,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}$.

   Cela fait n choix possibles pour $f(1)$ et $n-1$ pour $f(2)$, soit $n(n-1)$ choix possibles pour $\big(f(1),f(2)\big)$ de façon à ce que $f(1)\neq f(2)$ (autrement dit pour que f soit injective).

2. $f:I_m\to I_n$

   f injective équivaut à $f(1)=k_1; f(2)=k_2;\dots;f(m)=k_m$, avec $k_1,k_2,\dots,k_m\in\{1,2,\dots,n\}$ tous distincts par conséquent $m\leq n$.

   Remarque :

   Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2,\dots,m\}$ dans $\{1,2,\dots,n\}$ sont injectives !

   Supposons que f est surjective.

   Pour tout $k_1,k_2,\dots,k_n\in\{1,2,\dots,n\}$ (les k_i tous distincts) il existe $l_1,l_2,\dots,l_n\in\{1,2,\dots,m\}$ tels que $k_i=f(l_i)$ par définition d'une application tous les l_i sont distincts (sinon un élément aurait plusieurs images), par conséquent $n\leq m$.

Pour que f soit bijective il faut (et il suffit) que f soit injective et sujective, par conséquent il faut que $m \leq n$ et que $n \leq m$, autrement dit il faut que $m = n$.

Remarque :

Cela ne veut pas dire que toutes les applications de $\{1,2, \ldots, n\}$ dans $\{1,2, \ldots, n\}$ sont bijectives.

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

1. $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

   Car g est injective

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

   Car f est injective.

   Donc $g \circ f$ est injective.

2. Première méthode :

   Pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective.

   Comme pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective. On en déduit que pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$ autrement dit $g \circ f$ est surjective.

Remarque :

(a) D'habitude on appelle y un élément de l'image G mais ici ce pose un petit problème de notation parce que l'on va appeler x l'élément de F et on ne saura pas trop comment appeler l'élément de E, c'est pour cela qu'il est plus malin de l'appeler z.

(b) Si on commence par écrire « pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ car f est surjective » puis « pour tout $z \in G$ il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$ car g est surjective » donc « pour tout $z \in G$ il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x)) = g \circ f(x)$ » cela ne va pas, je vous laisse réfléchir pourquoi.

   Deuxième méthode :

   On rappelle que $\varphi: U \to V$ est surjective si et seulement si $\varphi(U) = V$

   Donc $f(E) = F$ et $g(F) = G$, par conséquent $g \circ f(E) = g(f(E)) = g(F) = G$ et on en déduit que $g \circ f$ est surjective.

3. Si g et f sont bijectives alors elles sont injectives et $g \circ f$ est injective et si g et f sont bijectives alors elles sont surjectives et $g \circ f$ est surjective, on en déduit que $g \circ f$ est bijective.
4. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

   Car $g \circ f$ est injective, par conséquent f est injective.
5. Première méthode :

   Pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $z = g \circ f(x) = g(f(x))$, donc il existe $y = f(x)$ tel que $z = g(y)$ ce qui signifie que g est surjective.

   Deuxième méthode :

   Comme $g \circ f$ est surjective, $g \circ f(E) = G \Leftrightarrow g(f(E)) = G$ or $f(E) \subset F$ donc

$$g(f(E)) \subset g(F)$$

   Comme $g(F) \subset G$, cela donne

$$G = g(f(E)) \subset g(F) \subset G$$

   D'où

$$g(f(E)) = g(F) = G \Rightarrow g(F) = G$$

   Ce qui montre que g est surjective.
6.

   a. $g \circ f = Id_E$ est bijective (l'identité est bijective)

   $g \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.

   $g \circ f$ est surjective, d'après 5°), g est surjective.

Remarque :
$g \circ f = Id_E$ n'entraine pas que $g = f^{-1}$ et que donc f et g sont bijectives.

b. $f \circ g = Id_F$ est bijective (l'identité est bijective)
$f \circ g$ est injective, d'après 4°), g est injective.
$f \circ g$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.

c. $f \circ f = Id_E$ est bijective
$f \circ f$ est injective, d'après 4°), f est injective.
$f \circ f$ est surjective, d'après 5°), f est surjective.
Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = f$.

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. Pour tout $y \in Y$ il existe $x = s(y) \in X$ tel que $y = Id_Y(y) = f\big(s(y)\big) = f(x)$, f est surjective.
2. $s(y_1) = s(y_2) \Rightarrow f\big(s(y_1)\big) = f\big(s(y_2)\big) \Rightarrow y_1 = y_2$
   s est injective.
3. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r\big(f(x_1)\big) = r\big(f(x_2)\big) \Rightarrow Id_X(x_1) = Id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   f est injective.
4. Pour tout $x \in X$, pose $y = f(x)$.
   Comme $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ à chaque $y \in Y$ telle que $y = f(x)$ on associe bien une unique valeur x, on définit alors $r: f(X) \to X$ par $r(y) = x$. Pour les $y \in Y$ qui ne sont pas dans l'image de X par f, autrement dit qui ne sont pas de la forme $y = f(x)$, on leur attribue n'importe quelle valeur dans X, mettons x_0 pour fixé les idées (d'ailleurs, on n'est pas obligé de leur attribuer à tous la même valeur).
   Pour tout $x \in X$.
   $$x = r(y) = r\big(f(x)\big) \Leftrightarrow Id_X = r \circ f$$
   r est bien une rétraction de f.

Remarque :
Si $y \notin f(X)$, $r(y) = x_0$ ne sert à rien pour montrer que r est une rétraction.

5. Pour tout $x \in X$, il existe $y = f(x)$ tel que :
   $$x = Id_X(x) = r\big(f(x)\big) = r(y)$$
   Cela montre que r est surjective.

Remarque :
Les rôles habituels de x et y ont été inversés pour respecter les notations de l'énoncé.

6.
   Si f admet une section alors f est surjective d'après 1°).
   Si f admet une rétraction alors f est injective d'après 3°).
   Par conséquent f est bijective, on note $f^{-1}: Y \to X$ sa bijection réciproque.
   Comme $Id_X = r \circ f$, en composant par f^{-1} à droite :
   $$Id_X \circ f^{-1} = (r \circ f) \circ f^{-1} \Leftrightarrow f^{-1} = r \circ (f \circ f^{-1}) = r$$
   Comme $Id_Y = f \circ s$, en composant par f^{-1} à gauche :
   $$f^{-1} \circ Id_Y = f^{-1} \circ (f \circ s) \Leftrightarrow f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ s = s$$
   D'où $r = s = f^{-1}$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. $f^{-1}(\{2\}) = \{3,4\}; f^{-1}(\{1,2\}) = \{2,3,4\}\,; f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
2.

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$$
$$f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}]$$

Allez à : Exercice 15 :

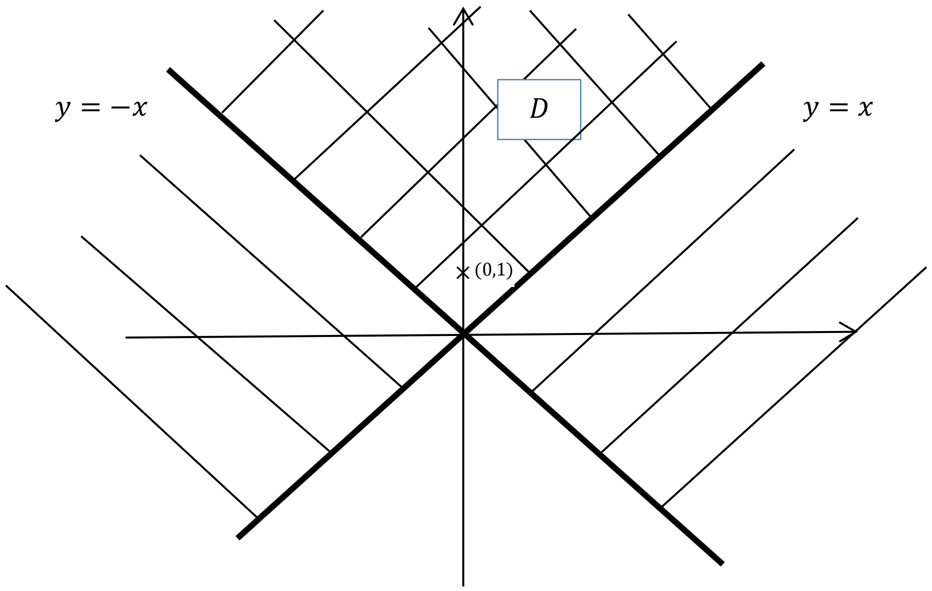
Correction exercice 16 :

1. $[0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$
   Donc
$$f([0,1] \times [0,1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$$
$$f^{-1}([-1,1]) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \in [-1,1]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [-1,1]\} = [-1,1] \times \mathbb{R}$$
2.
$$f(\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = (-1)^{\mathrm{n}}, n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$$
$$f(2\mathbb{N}) = \{y \in [-1,1], y = \cos(2\pi n), n \in \mathbb{N}\} = \{y \in [-1,1], y = 1, n \in \mathbb{N}\} = \{1\}$$
$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, \cos(\pi x) = \pm 1\}$$
   Or $\cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$ et $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$$f^{-1}(\{\pm 1\}) = \{x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi, x = (2k+1)\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\} = \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. Le point $(0,1)$ vérifie $x \leq y$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ est le demi-plan supérieur droit. De même $(0,1)$ vérifie $-y \leq x$ donc $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x\}$ est le demi-plan supérieur droit, D est l'intersection de ces deux demi-plan, D est le quart de plan supérieur du schéma ci-dessous.



2. a.
$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$
   En additionnant L_1 et L_2 on trouve que $2x_1 = 2x_2$, donc $x_1 = x_2$, puis en remplaçant dans L_1, on trouve que $y_1 = y_2$.
   b.
$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1^2 + y_1^2, 2x_1y_1) = (x_2^2 + y_2^2, 2x_2y_2) \Rightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \\ 2x_1y_1 = 2x_2y_2 \end{cases}$$
   $L_1 - L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2$, comme $x - y \leq 0$ sur D, cela donne $-(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$ ou encore $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$.

$L_1 + L_2$ donne $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2$, ce qui entraine que $(x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$, comme $x + y \geq 0$ sur D, cela donne $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.

D'après 2.a. cela donne que $x_1 = x_2$ et que $y_1 = y_2$, ce qui montre que f est injective.

3. $(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent dans D car $x^2 + y^2 > 0$.

Allez à : Exercice 17 :