Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Seconde chance du 21 juin 2021-durée 2h

Attention à la rédaction, pas de téléphone portable ni de calculatrice, on ne sort que une heure après le début de l'examen.

Exercice 1.

a. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application linéaire.
Donner la définition du noyau $\ker(f)$.

b. Montrer que le noyau est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2.

a. Calculer la valeur de $I = \int_0^1 \ln(1+x)\, dx$

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right) - \ln(n)$$

Exprimer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ en fonction de I.
Indication : on pourra utiliser une somme de Riemann.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3.

Soit $F(X) = \frac{X^4-2X^3+4X^2-X}{(X^2+1)(X-1)}$

a. Décomposer $G(X) = \frac{2X^2+X-1}{X^3-X^2+X-1}$ en éléments simples

b. En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(t) = \frac{t^4-2t^3+4t^2-t}{t^3-t^2+t-1}$
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{t\to\pm\infty}\big(f(t) - (at+b)\big) = 0$$

Exercice 4.

a. Trouver $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, en déduire $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

b. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, trouver $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \sin(t)$. En déduire $\arcsin(\sin(x))$.

c. Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\sin(x))$.

Exercice 5.

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 6.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$
$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.
4. Montrer que $\beta' = \big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.