Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019
Fondamentaux des Mathématiques 2 21 juin 2019

Correction de l'examen final session 2 du 21 juin 2019 – 10h-12h

---

Exercice 1

1. $N^0 = I$, $N^1 = N$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $n > 2$ on a $N^n = O$ la matrice nulle.
2. $A^0 = I, A^1 = A$
   les matrices $4I$ et N commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\forall n > 1, A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4I)^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{n-k} N^k =$$
$$\binom{n}{0} 4^n I + \binom{n}{1} 4^{n-1} N + \binom{n}{2} 4^{n-2} N^2 = \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} \\ 0 & 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les deux racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de cette équation sont $y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.
2. 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $y_P = (Ax + B)e^{3x}$. où A et B sont des constantes réelles. On a alors
$$y'_P = Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x} = (3Ax + A + 3B)e^{3x}$$
$$y''_P = 3(3Ax + A + 3B)e^{3x} + 3Ae^{3x} = (9Ax + 6A + 9B)e^{3x}$$
$$y''_P - 3y'_P + 2y_P = xe^{3x} \Leftrightarrow (9Ax + 6A + 9B)e^{3x} - 3((3Ax + A + 3B)e^{3x}) + 2(Ax + B)e^{3x} =$$
$$xe^{3x} \Leftrightarrow (2AX + 3A + 2B)e^{3X} = xe^{3x} \begin{cases} 2A = 1 \\ 3A + 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{4} \end{cases}$$
   Une solution particulière est donc
$$y_P = (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4})e^{3x}$$
3. 2 est racine de l'équation caractéristique donc il existe une solution particulière de la forme $y_P = Axe^{2x}$ où A est une constante réelle. On a alors :
$$y'_P = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = (2Ax + A)e^{2x}$$
$$y''_P = 2(2Ax + A)e^{2x} + 2Ae^{2x} = (4Ax + 4A)e^{2x}$$
$$y''_P - 3y'_P + 2y_P = e^{2x} \Leftrightarrow (4Ax + 4A)e^{2x} - 3(2Ax + A)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = 1$$
   Une solution particulière est donc
$$y_P = xe^{2x}$$
4. La solution générale de cette équation est
$$y = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4})e^{3x} + xe^{2x}$$
$$y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 - \tfrac{3}{4} = 0$$
$$y' = \lambda_1 e^x + 2\lambda_2 e^{2x} + 3(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4})e^{3x} + \tfrac{1}{2}e^{3x} + 2xe^{2x} + e^{2x}$$
$$y'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 - \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{2} + 1 = 0$$
   Cela donne le système
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{3}{4} = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{9}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{3}{4} \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{4} \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

La solution cherchée est :

$$y = \frac{3}{4}e^x + (\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{3x} + xe^{2x}$$

Exercice 3

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

   On en déduit que $u^2 = u$.

2. $\mathrm{Im}(u) = Vect(2e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 2e_4, e_2, e_3, -e_1 - 2e_2 + e_3 - e_4) = Vect(2e_1 + 2e_4, e_2, e_3, -e_1 - e_4) = Vect(e_1 + e_4, e_2, e_3)$

   Par une simple vérification on montre que la famille $(e_1 + e_4, e_2, e_3)$ est libre, comme cette famille engendre $\mathrm{Im}(u)$ c'est une base de $\mathrm{Im}(u)$ la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ est donc 3 et bien sûr le rang de u est 3.

   D'après le théorème du rang : $\dim(\ker(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 3$ par conséquent $\dim(\ker(u)) = 1$.

3. u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$, pour que celui-ci soit bijectif il faut et il suffit que soit $\dim(\ker(u)) = 0$ soit que $\mathrm{rg}(u) = 4$ ce n'est pas le cas, donc u n'est pas bijectif et sa matrice n'est pas inversible.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_1 \Leftrightarrow (\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_4 = 0$$

   On en déduit que $x \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \exists x_1, x_4 \in \mathbb{R}$ tels que $x = (x_1, x_2, x_3, x_1) = x_1(1, 0, 0, 1) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0)$.

   Autrement dit E_1=vect$(e_1 + e_4, e_2, e_3)$

   On vérifie facilement que $(e_1 + e_4, e_2, e_3)$ est une famile libre, il s'agit donc d'une base de E_1, on pose donc $v_1 = e_1 + e_4, v_2 = e_2$ et $v_3 = e_3$, et $\dim(E_1) = 3$.

5. Première méthode longue et calculatoire, on cherche d'abord une base de $\ker(u)$.Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$.

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_4 = 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_1 = 0 \\ 3x_1 + x_3 - 6x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que}$$
$$x = (x_1, 2x_1, 3x_1, 2x_1) = x_1(1, 2, 3, 2)$$

   Ce qui montre que $\ker(u)$=vect$(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 2e_4)$ et qu'une base de $\ker(u)$ est $v_4 = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 2e_4$

   Ensuite on montre que $(e_1 + e_4, e_2, e_3, v_4)$ est une famille libre à 4 éléments et que c'est donc une base de $\mathbb{R}^4$, ce que je ne détaillerai pas dans cette correction, mais il faudrait le faire en examen.

   Deuxième méthode plus théorique mais tellement plus rapide.

   $\dim(E_1) + \dim(\ker(u)) = 3 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$

   Soit $x \in E_1 \cap \ker(u)$ on a $u(x) = 0_{\mathbb{R}^4}$ et $u(x) = x$ donc $x = 0_{\mathbb{R}^4}$, ce qui montre que : $E_1 \cap \ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, on a bien $E_1 \bigoplus \ker(u) = \mathbb{R}^4$

6. Comme $E_1 \bigoplus \ker(u) = \mathbb{R}^4$ la famille constituée d'une base de E_1 et d'une base de $\ker(u)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, si on appelle P la matrice de u dans cette base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. $f'(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$
2. f est de classe C^∞, on peut donc appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$f(0) = 0$, $f'(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$ entraine que $f'(0) = \ln(2)$, puis on calcule $f''(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^{-x}e^x}{1+e^x} = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x}$, d'où l'on déduit que $f''(0) = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Alors
$$f(x) = \ln(2)x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \ln(2))x^2 + o(x^2)$$
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc $y = \ln(2)x$ $f(x) - y = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \ln(2))x^2 < 0$, au voisinage de 0 car $\frac{1}{2} < \ln(2)$. Le graphe de f est donc au-dessous de la tangente au voisinage du point d'abscisse 0.
4. Décomposons la fraction rationnelle $\frac{1}{y(y+1)}$ en éléments simples avec une petite "ruse"
$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{y+1-y}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$
$$\int_1^{e^x} \frac{1}{y(y+1)}dy = \int_1^{e^x} (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1})dy = [\ln|y| - \ln|1+y|]_1^{e^x} = \ln(e^x) - \ln(1+e^x) - ln(1) + ln(2) =$$
$$x - \ln(1+e^x) + \ln(2)$$
5. On fait le changement de variable $= e^t$. Pour l'élément différentiel et les bornes :
$$y = e^t \Leftrightarrow t = \ln(y)$$
par conséquent $dt = \frac{dy}{y}$. **S**i $t = 0$ alors $y = e^0 = 1$ et si $t = x$ alors $y = e^x$.
$$e^{-t}\ln(1+e^t) = \frac{1}{y}\ln(1+y)$$
on en déduit que :
$$f(x) = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^t)dt = \int_1^{e^x} \frac{1}{y}\ln(1+y)\frac{dy}{y} = \int_1^{e^x} \frac{1}{y^2}\ln(1+y)dy$$
6. On pose $u'(y) = \frac{1}{y^2}$ et $v(y) = \ln(1+y)$, donc $u(y) = -\frac{1}{y}$ et $v'(y) = \frac{1}{1+y}$ et on en déduit que :
$$f(x) = [-\frac{1}{y}\ln(y+1)]_1^{e^x} + \int_1^{e^x} \frac{1}{y(y+1)}dy$$
7. On en déduit que
$$f(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln(2) + x - \ln(1+e^x) + \ln(2) =$$
$$-e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln(2) + \ln(e^x) - \ln(1+e^x) + \ln(2) = -(1+e^{-x})\ln(1+e^x) + x + 2\ln(2)$$