
Examen final session 2 du 21 juin 2019 – 10h-12h

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez prises.

Exercice 1 Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = 4I + N$.

- a) Calculer N^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2

- a) Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$
- b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}$.
- c) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.
- d) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = xe^{3x} + e^{2x}$. Parmi ces solutions, déterminer celle qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$

Exercice 3 Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4
Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On note $E_1 = \ker(u - \text{id})$.

- a) Calculer A^2 , en déduire u^2 .
- b) Quel est le rang de u ? En déduire la dimension de $\ker u$.
- c) La matrice A est-elle inversible (si oui donner l'inverse de A sinon justifier votre réponse)?
- d) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de E_1 . Quelle est la dimension de E_1 ?
- e) Montrer que $E_1 \oplus \ker u = \mathbb{R}^4$
- f) Soit v_4 un vecteur non nul de $\ker u$. Montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de \mathbb{R}^4 . Donner la matrice de u dans cette base.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^t) dt$$

- a) Calculer $f'(x)$ pour tout x réel.
- b) Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$ et en déduire le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
- c) Déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente en 0.
- d) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{y(y+1)}$$

et en déduire $\int_1^{e^x} \frac{dy}{y(y+1)}$.

e) Effectuer le changement de variables $y = e^t$ dans l'intégrale

$$f(x) = \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^t) dt .$$

f) Faire une intégration par parties dans l'intégrale obtenue à la question précédente.

g) Calculer $f(x)$.