Examen final session 2 du 22 juin 2018-durée 1h

Attention à la rédaction, pas de téléphone portable ni de calculatrice, on ne sort que une heure après le début de l'examen.

Exercice 1.

On rappelle que la dérivée de la fonction $x \to \arctan(x)$ est $x \to \frac{1}{1+x^2}$.

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(t) = \arctan\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$

1. Calculer $f'(t)$ et $f(0)$.
2. En déduire une expression plus simple de $f(t)$.

Exercice 2.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :
$$g(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)$$
Montrer que
$$\int f(x)dx = -\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) + \int g(x)dx$$
3. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 3.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur v_1 tel que $\ker(u) = Vect(v_1)$.
2. Soient $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (-1,0,-1)$. Exprimer $u(v_2)$ et $u(v_3)$ en fonction de v_2 et v_3.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}'$.