
Seconde session, 26 juin 2017-Durée 2h.

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base \mathcal{B} .

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer Au .
2. Déterminer le noyau de f .
3. En déduire le rang de f . Donner une base de $Im(f)$.
4. Soit $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 1, 0)$. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$.
5. Montrer que (v_1, v_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^3 et exprimer $f(e_1)$ en fonction de v_1, v_2 et e_1 .
6. Déterminer la matrice M de f dans la base (v_1, v_2, e_1) .
7. La matrice M est-elle inversible ? (On ne demande pas de calculer son inverse).

Correction exercice 1.

1.

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ -x + y \end{pmatrix}$$

2.

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Donc $(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$ et

$$\ker(f) = \text{Vect}(-e_1 - e_2 + e_3)$$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \text{rg}(f) = \dim(Im(f)) = 3 - 1 = 2$$

$f(e_1) = e_1 - e_3$ et $f(e_2) = e_2 + e_3$ forment une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, dans un espace de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

4. Les coordonnées de $f(v_1)$ dans \mathcal{B} sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(v_1) = 2e_1 + 2e_2 = 2v_2$

Les coordonnées de $f(v_2)$ dans \mathcal{B} sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(v_2) = e_1 + e_2 = v_2$

5.

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc (v_1, v_2, e_1) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base.

Les coordonnées de $f(e_1)$ dans \mathcal{B} sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(e_1) = -v_1 + v_2 + e_1$

Autre méthode :

Les coordonnées de $f(e_1)$ dans \mathcal{B} sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Et on cherche α, β et γ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

On retrouve le même résultat.

6.

$$M = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(e_1) \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ e_1 \end{matrix}$$

7. Les deux premières colonnes sont proportionnelles et la troisième n'est pas proportionnelle aux deux premières donc le rang de M est deux, or pour que la matrice soit inversible il faut et il suffit que le rang de la matrice soit trois.

Autre méthode : $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc l'endomorphisme f n'est pas bijectif, par conséquent M n'est pas inversible.

Exercice 2.

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$$

Correction exercice 2.

L'équation homogène est $y'' + 3y' + 2y = 0$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

Ses racines sont -1 et -2 donc les solutions sont :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{-2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

-1 (le coefficient dans l'exponentielle) est solution de l'équation caractéristique) donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_p = x(ax + b)e^{-x} = (ax^2 + bx)e^{-x}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$y_p' = -(ax^2 + bx)e^{-x} + (2ax + b)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x}$$

$$y_p'' = -(-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} + (-2ax + 2a - b)e^{-x} = (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b)e^{-x}$$

Ce que l'on remplace dans l'équation

$$\begin{aligned}
y_p'' + 3y_p' + 2y_p &= xe^{-x} \\
&\Leftrightarrow (ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b)e^{-x} + 3(-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\
&\quad + 2(ax^2 + bx)e^{-x} = xe^{-x} \\
&\Leftrightarrow ((a - 3a + 2a)x^2 + (-4a + b + 6a - 3b + 2b)x + 2a - 2b + 3b)e^{-x} = xe^{-x} \\
&\Leftrightarrow 2ax + 2a - b = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-x}$ et la solution générale de l'équation est :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)e^{-x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $f: x \mapsto \frac{2}{2-x^2}$.
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $g: x \mapsto \exp(1 - \cos(x))$
3. En déduire la limite de $\frac{f(x)-g(x)}{x^4}$ quand x tend vers 0.

Correction exercice 3.

1.

2	$+ o(x^4)$	$\frac{2 - x^2 + o(x^4)}{1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4}$
$2 - x^2$	$+ o(x^4)$	
x^2	$+ o(x^4)$	
$x^2 - \frac{1}{2}x^4$	$+ o(x^4)$	
$\frac{1}{2}x^4$	$+ o(x^4)$	
$\frac{1}{2}x^4$	$+ o(x^4)$	$o(x^4)$

Donc

$$\frac{2}{2-x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

Autre méthode

$$\frac{2}{2-x^2} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

2.

$$\begin{aligned}
\exp(1 - \cos(x)) &= \exp\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \exp(X) \\
&= 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
X^2 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
o(X^2) &= o(x^4)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \exp(1 - \cos(x)) &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) + \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{2} + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - g(x)}{x^4} &= \frac{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)}{x^4} = \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Calculer

$$\int_1^e (x^2 + 1) \ln(x) dx$$

2. A l'aide d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^{e-1} (u^2 + 2u + 2) \ln(1 + u) du$$

Correction exercice 4.

1. A l'aide d'une intégration par parties

$$\int_1^e (x^2 + 1) \ln(x) dx$$

$$u'(x) = x^2 + 1$$

$$u(x) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$v(x) = \ln(x)$$

$$v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_1^e (x^2 + 1) \ln(x) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \frac{1}{x} dx$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_1^e (x^2 + 1) \ln(x) dx &= \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \left(\frac{e^3}{3} + e \right) \ln(e) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) \ln(1) - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{e^3}{3} + e - \left[\frac{x^3}{9} + x \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} + e - \left(\frac{e^3}{9} + e - \left(\frac{1^3}{9} + 1 \right) \right) = \frac{2e^3}{9} + \frac{10}{9} \end{aligned}$$

2. On pose $1 + u = x$ ou $u = x - 1$ donc $du = dx$

$$u = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$u = e - 1 \Rightarrow x = e$$

$$(u^2 + 2u + 2) \ln(1 + u) = ((u + 1)^2 + 1) \ln(u + 1) = (x^2 + 1) \ln(x)$$

Donc

$$\int_0^{e-1} (u^2 + 2u + 2) \ln(1 + u) du = \int_1^e (x^2 + 1) \ln(x) dx = \frac{2e^3}{9} + \frac{10}{9}$$