Université Claude Bernard-Lyon 1 semestre de printemps 2017

Fondamentaux des mathématiques 2

Seconde session, 26 juin 2017-Durée 2h.

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer Au.
2. Déterminer le noyau de f.
3. En déduire le rang de f. Donner une base de $Im(f)$.
4. Soit $v_1 = (1,1,1)$ et $v_2 = (1,1,0)$. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$.
5. Montrer que (v_1, v_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer $f(e_1)$ en fonction de v_1, v_2et e_1.
6. Déterminer la matrice M de f dans la base (v_1, v_2, e_1).
7. La matrice M est-elle inversible ? (On ne demande pas de calculer son inverse).

Correction exercice 1.

1.

$$Au = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ -x+y \end{pmatrix}$$

2.

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \\ z-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

Donc $(x, y, z) = (-z, -z, z) = z(-1, -1, 1)$ et

$$\ker(f) = Vect(-e_1 - e_2 + e_3)$$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow rg(f) = \dim\big(Im(f)\big) = 3 - 1 = 2$$

$f(e_1) = e_1 - e_3$ et $f(e_2) = e_2 + e_3$ forment une famille de deux vecteurs non proportionnels, donc libre, dans un espace de dimension 2, c'est une base de $Im(f)$.

4. Les coordonnées de $f(v_1)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(v_1) = 2e_1 + 2e_2 = 2v_2$

Les coordonnées de $f(v_2)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $f(v_2) = e_1 + e_2 = v_2$

5.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma e_1=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow \alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}$$

Donc (v_1,v_2,e_1) est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension trois, c'est une base.

Les coordonnées de $f(e_1)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Donc $f(e_1)=-v_1+v_2+e_1$

Autre méthode :

Les coordonnées de $f(e_1)$ dans $\mathcal{B}$ sont

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Et on cherche α,β et γ tels que

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \alpha+\beta=0\\ \alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=1\\ \beta=1\\ \alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=1\\ \beta=1\\ \alpha=-1\end{cases}$$

On retrouve le même résultat.

6.

$$M=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccc}f(v_1)&f(v_2)&f(e_1)\end{array}&\\ \begin{pmatrix}0&0&-1\\2&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}&\begin{array}{c}v_1\\v_2\\e_1\end{array}\end{array}$$

7. Les deux premières colonnes sont proportionnelles et la troisième n'est pas proportionnelle aux deux premières donc le rang de M est deux, or pour que la matrice soit inversible il faut et il suffit que le rang de la matrice soit trois.

   Autre méthode : $\ker(f)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc l'endomorphisme f n'est pas bijectif, par conséquent M n'est pas inversible.

Exercice 2.

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y''+3y'+2y=xe^{-x}$$

Correction exercice 2.

L'équation homogène est $y''+3y'+2y=0$

L'équation caractéristique est :

$$r^2+3r+2=0$$

Ses racines sont -1 et -2 donc les solutions sont :

$$y=\lambda_1e^{-x}+\lambda_2e^{-2x},\qquad \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$$

-1 (le coefficient dans l'exponentielle) est solution de l'équation caractéristique) donc il existe une solution particulière de la forme

$$y_P=x(ax+b)e^{-x}=(ax^2+bx)e^{-x},\ \ a,b\in\mathbb{R}$$

$$y_P'=-(ax^2+bx)e^{-x}+(2ax+b)e^{-x}=(-ax^2+(2a-b)x+b)e^{-x}$$

$$y_P''=-(-ax^2+(2a-b)x+b)e^{-x}+(-2ax+2a-b)e^{-x}=(ax^2+(-4a+b)x+2a-2b)e^{-x}$$

Ce que l'on remplace dans l'équation

$$y_P'' + 3y_P' + 2y_P = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (ax^2 + (-4a+b)x + 2a - 2b)e^{-x} + 3(-ax^2 + (2a-b)x + b)e^{-x} + 2(ax^2 + bx)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \big((a - 3a + 2a)x^2 + (-4a + b + 6a - 3b + 2b)x + 2a - 2b + 3b\big)e^{-x} = xe^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2ax + 2a + b = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc $y_P = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$ et la solution générale de l'équation est :

$$y = \lambda_1 e^{-x} + \lambda_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $f: x \longmapsto \frac{2}{2-x^2}$.
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $g: x \longmapsto \exp(1 - \cos(x))$
3. En déduire la limite de $\frac{f(x)-g(x)}{x^4}$ quand x tend vers 0.

Correction exercice 3.

1.

$$\begin{array}{l|l}
2 \qquad\qquad\qquad + o(x^4) & 2 - x^2 + o(x^4) \\
2 - x^2 \qquad\quad\;\; + o(x^4) & \hline 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \\
\hline
\quad x^2 \qquad\qquad + o(x^4) & \\
\quad x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) & \\
\hline
\qquad\quad \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) & \\
\qquad\quad \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) & \\
\hline
\qquad\qquad\quad o(x^4) &
\end{array}$$

Donc

$$\frac{2}{2 - x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

Autre méthode

$$\frac{2}{2 - x^2} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

2.

$$\exp(1 - \cos(x)) = \exp\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \exp(X)$$

$$= 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Avec

$$X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$X^2 = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$o(X^2) = o(x^4)$$

Par conséquent

$$\exp(1-\cos(x)) = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)+\frac{\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{2}+o(x^4) = 1+\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)$$
$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)$$

3.

$$\frac{f(x)-g(x)}{x^4} = \frac{1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)-\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o(x^4)\right)}{x^4} = \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}+o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$$

Exercice 4.

1. Calculer

$$\int_1^e (x^2+1)\ln(x)\,dx$$

2. A l'aide d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^{e-1} (u^2+2u+2)\ln(1+u)\,du$$

Correction exercice 4.

1. A l'aide d'une intégration par parties

$\int_1^e (x^2+1)\ln(x)\,dx$

$u'(x) = x^2+1$ $\quad$ $u(x) = \frac{x^3}{3}+x$

$v(x) = \ln(x)$ $\quad$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$\int_1^e (x^2+1)\ln(x)\,dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}dx$

Par conséquent

$$\int_1^e (x^2+1)\ln(x)\,dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}dx$$
$$= \left(\frac{e^3}{3}+e\right)\ln(e)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right)\ln(1)-\int_1^e\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx = \frac{e^3}{3}+e-\left[\frac{x^3}{9}+x\right]_1^e$$
$$= \frac{e^3}{3}+e-\left(\frac{e^3}{9}+e-\left(\frac{1^3}{9}+1\right)\right) = \frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$

2. On pose $1+u=x$ ou $u=x-1$ donc $du=dx$

$$u=0 \Rightarrow x=1$$
$$u=e-1 \Rightarrow x=e$$
$$(u^2+2u+2)\ln(1+u) = ((u+1)^2+1)\ln(u+1) = (x^2+1)\ln(x)$$

Donc

$$\int_0^{e-1}(u^2+2u+2)\ln(1+u)\,du = \int_1^e (x^2+1)\ln(x)\,dx = \frac{2e^3}{9}+\frac{10}{9}$$