
Seconde session, 26 juin 2017-Durée 2h.

Exercice 1.

Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont A est la matrice dans la base \mathcal{B} .

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer Au .
2. Déterminer le noyau de f .
3. En déduire le rang de f . Donner une base de $Im(f)$.
4. Soit $v_1 = (1, 1, 1)$ et $v_2 = (1, 1, 0)$. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$.
5. Montrer que (v_1, v_2, e_1) est une base de \mathbb{R}^3 et exprimer $f(e_1)$ en fonction de v_1, v_2 et e_1 .
6. Déterminer la matrice M de f dans la base (v_1, v_2, e_1) .
7. La matrice M est-elle inversible ? (On ne demande pas de calculer son inverse).

Exercice 2.

Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$$

Exercice 3.

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $f: x \mapsto \frac{2}{2-x^2}$.
2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $g: x \mapsto \exp(1 - \cos(x))$
3. En déduire la limite de $\frac{f(x)-g(x)}{x^4}$ quand x tend vers 0.

Exercice 4.

1. Calculer

$$\int_1^e (x^2 + 1) \ln(x) dx$$

2. A l'aide d'un changement de variable, calculer

$$\int_0^{e-1} (u^2 + 2u + 2) \ln(1 + u) du$$