

Examen session 2 (1 heure)
19 juin 2018

Exercice 1.

1.

a. Trouver A et B réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{3}{n^2 + 3n + 2} = \frac{A}{n + 1} + \frac{B}{n + 2}$$

b. Calculer :

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n^2 + 3n + 2}$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation suivante : $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$.

Correction exercice 1

1.

a.

$$\frac{A}{n + 1} + \frac{B}{n + 2} = \frac{A(n + 2) + B(n + 1)}{(n + 1)(n + 2)} = \frac{(A + B)n + 2A + B}{n^2 + 3n + 2}$$

A et B doivent donc vérifier :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -2B + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -3 \end{cases}$$

b.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n^2 + 3n + 2} &= \sum_{n=0}^{10} \left(\frac{3}{n + 1} - \frac{3}{n + 2} \right) = \sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n + 1} - \sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n + 2} = \sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n + 1} - \sum_{n=1}^{11} \frac{3}{n + 1} \\ &= 3 - \frac{3}{12} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

2. Le discriminant est :

$$\Delta = (4i - 3)^2 - 4i(i - 5) = -16 - 24i + 9 + 4 + 20i = -3 - 4i = 1 - 4i - 4 = (1 - 2i)^2$$

Les deux racines sont donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-(4i - 3) - (1 - 2i)}{2i} = \frac{2 - 2i}{2i} = \frac{1 - i}{i} = \frac{1}{i} - 1 = -1 - i \\ z_2 &= \frac{-(4i - 3) + (1 - 2i)}{2i} = \frac{4 - 6i}{2i} = \frac{2 - 3i}{i} = -3 - 2i \end{aligned}$$

Exercice 2.

On considère l'application f définie pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|.$$

1. Justifier le fait que f est bien définie sur \mathcal{D}_f .

2. Montrer que f est impaire.

3. Montrer que f admet une limite quand x tend vers 1 et quand x tend vers -1 .

Indication : on pourra poser $x = 1 + t$ et calculer, en justifiant, $\lim_{t \rightarrow 0} f(1 + t)$ puis utiliser la question précédente pour conclure.

4. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1 et -1 . On note h le prolongement de f défini sur \mathbb{R} .

5. L'application h est-elle dérivable en 1 ?
 6. On note désormais $\mathcal{D}_+ =]0,1[\cup]1, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_+$ on pose :

$$u(x) = \ln\left(\frac{1+x}{|1-x|}\right) - \frac{1}{x}$$

- a. Montrer que la dérivée sur \mathbb{R}_+^* de l'application $x \rightarrow \ln|x|$ est l'application $x \rightarrow \frac{1}{x}$.
 b. Montrer que la dérivée u' de u sur \mathcal{D}_+ vérifie $u'(x) = \frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_+$.
 c. Déterminer la monotonie de u sur \mathcal{D}_+ .
 d. Montrer que $u(x) > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ et qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $u(x) < 0$ pour $x \in]0, \alpha[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, 1[$.
 e. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_+$, $f'(x) = 2xu(x)$.
 f. En déduire le tableau de variation de f sur \mathcal{D}_+ .
 g. Représenter le graphe de la fonction h .

Correction exercice 2

1. f est définie si et seulement si $x \rightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est définie et si $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > 0$, autrement dit si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
 2. L'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et

$$f(-x) = ((-x)^2 - 1) \ln \left| \frac{-x+1}{-x-1} \right| = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par -1 . Puis comme pour a et b positifs.

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On a :

$$f(-x) = -(x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = -f(x)$$

Ce qui montre que f est impaire.

3. Comme $t = x - 1$, $t \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} f(1+t) &= ((1+t)^2 - 1) \ln \left| \frac{1+t+1}{t} \right| = (1+2t+t^2-1)(\ln|2+t| - \ln|t|) \\ &= (2+t)t \ln|2+t| - (2+t)t \ln|t| \\ \lim_{t \rightarrow 0} (2+t)t \ln|2+t| &= 2 \ln(2) \\ \lim_{t \rightarrow 0} (2+t)t \ln|t| &= 0 \quad \text{par croissance comparée} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(1+t) = 2 \ln(2)$$

Comme f est impaire

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 \ln(2)$$

4. f est prolongeable par continuité en 1 par $h(1) = 2 \ln(2)$
 f est prolongeable par continuité en -1 par $h(-1) = -2 \ln(2)$.
 5. Pour $x \neq 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} &= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 2 \ln(2)}{x - 1} \\
&= \frac{(x-1)(x+1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|) - 2 \ln(2)}{x - 1} \\
&= \frac{(x-1)(x+1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|)}{x - 1} - \frac{2 \ln(2)}{x - 1} \\
&= (x+1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|) - \frac{2 \ln(2)}{x - 1} \\
&= (x+1) \ln|x+1| - (x+1) \ln|x-1| - \frac{2 \ln(2)}{x - 1} \\
&= (x+1) \ln|x+1| - \frac{1}{x-1} \left((x+1)(x-1) \ln|x-1| - 2 \ln(2) \right) \\
&\quad \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \ln|x+1| = 2 \ln(2) \\
\lim_{x \rightarrow 1} - \frac{1}{x-1} \left((x+1)(x-1) \ln|x-1| - 2 \ln(2) \right) &= \pm \infty
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \pm \infty$$

Ce qui montre que h n'est pas dérivable en 1.

6.

a. Pour $x > 0$, $|x| = x$ donc la dérivée de $x \rightarrow \ln|x|$ est $x \rightarrow \frac{1}{x}$.

b. pour tout $x \in \mathcal{D}_+$

$$u(x) = \ln \left(\frac{1+x}{|1-x|} \right) - \frac{1}{x} = \ln(x+1) - \ln|x-1| - \frac{1}{x}$$

Si $x \in]0,1[$, $x - 1 < 0$ donc $|x - 1| = 1 - x$ et

$$u(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x) - \frac{1}{x}$$

Alors

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{(1-x)x^2 + (1+x)x^2 + (1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)x^2} \\
&= \frac{x^2 - x^3 + x^2 + x^3 + 1 - x^2}{(1-x)(1+x)x^2} = \frac{x^2 + 1}{(1-x)(1+x)x^2}
\end{aligned}$$

Si $x \in]1, +\infty[$, $x - 1 > 0$ donc $|x - 1| = x - 1$ et

$$u(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) - \frac{1}{x}$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2}$$

On retombe sur le même résultat que lorsque $x \in]0,1[$, le résultat est identique.

c. Si $x \in]0,1[$ alors $1 - x^2 > 0$ et $u'(x) > 0$ donc u est croissante.

Si $x \in]1, +\infty[$ alors $1 - x^2 < 0$ et $u'(x) < 0$ donc u est décroissante.

d.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{1+x}{|1-x|} \right) - \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

Et u est décroissante sur $]1, +\infty[$ ce qui montre que $u(x) > 0$ sur cet intervalle.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \left(\frac{1+x}{|1-x|} \right) - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln \left(\frac{1+x}{|1-x|} \right) - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Ce qui montre que u est une bijection croissante de $]0,1[$ sur \mathbb{R} . Il existe donc un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $u(\alpha) = 0$, $u(x) < 0$ pour $x \in]0, \alpha[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, 1[$.

e. Pour tout $x \in \mathcal{D}_+$

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = (x^2 - 1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|)$$

$$f'(x) = 2x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + (x^2 - 1) \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = 2x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + (x^2 - 1) \frac{x-1 - (x+1)}{x^2 - 1}$$

$$= 2x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 2 = 2x \left(\ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{x} \right) = 2xu(x)$$

f.

x	0	α	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$2 \ln(2)$	$+\infty$

Car si on pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) \ln \left| \frac{\frac{1}{t} + 1}{\frac{1}{t} - 1} \right| = \frac{1-t^2}{t^2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|$$

$$= \frac{1-t^2}{t} \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t} = \frac{1-t^2}{t} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-t)}{t} = -1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t} \right) = 2$$

Par conséquent

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1-t^2}{t} \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t} \right) = +\infty$$

g.

