Université Claude Bernard, Lyon 1 Licence Sciences et Technologies
Fondamentaux des mathématiques 1

Examen session 2 (1 heure)
19 juin 2018

Exercice 1.

1.

a. Trouver A et B réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{3}{n^2+3n+2} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$

b. Calculer :

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n^2+3n+2}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$.

Correction exercice1

1.

a.

$$\frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+B(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A+B}{n^2+3n+2}$$

A et B doivent donc vérifier :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -2B+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-3 \end{cases}$$

b.

$$\sum_{n=0}^{10} \frac{3}{n^2+3n+2} = \sum_{n=0}^{10}\left(\frac{3}{n+1} - \frac{3}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{10}\frac{3}{n+1} - \sum_{n=0}^{10}\frac{3}{n+2} = \sum_{n=0}^{10}\frac{3}{n+1} - \sum_{n=1}^{11}\frac{3}{n+1}$$

$$= 3 - \frac{3}{12} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

2. Le discriminant est :

$$\Delta = (4i-3)^2 - 4i(i-5) = -16 - 24i + 9 + 4 + 20 = -3 - 4i = 1 - 4i - 4 = (1-2i)^2$$

Les deux racines sont donc :

$$z_1 = \frac{-(4i-3)-(1-2i)}{2i} = \frac{2-2i}{2i} = \frac{1-i}{i} = \frac{1}{i} - 1 = -1 - i$$

$$z_2 = \frac{-(4i-3)+(1-2i)}{2i} = \frac{4-6i}{2i} = \frac{2-3i}{i} = -3-2i$$

Exercice 2.

On considère l'application f définie pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ par

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

1. Justifier le fait que f est bien définie sur $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que f admet une limite quand x tend vers 1 et quand x tend vers -1.
   Indication : on pourra poser $x = 1 + t$ et calculer, en justifiant, $\lim\limits_{t\to 0} f(1+t)$ puis utiliser la question précédente pour conclure.
4. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1 et -1. On note h le prolongement de f défini sur $\mathbb{R}$.

5. L'application h est-elle dérivable en 1 ?
6. On note désormais $\mathcal{D}_+ =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout $x \in \mathcal{D}_+$ on pose :
$$u(x) = \ln\left(\frac{1+x}{|1-x|}\right) - \frac{1}{x}$$
   a. Montrer que la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'application $x \to \ln|x|$ est l'application $x \to \frac{1}{x}$.
   b. Montrer que la dérivée u' de u sur $\mathcal{D}_+$ vérifie $u'(x) = \frac{1+x^2}{x^2(1-x^2)}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_+$.
   c. Déterminer la monotonie de u sur $\mathcal{D}_+$.
   d. Montrer que $u(x) > 0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ et qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $u(x) < 0$ pour $x \in]0,\alpha[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, 1[$.
   e. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_+$, $f'(x) = 2xu(x)$.
   f. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_+$.
   g. Représenter le graphe de la fonction h.

Correction exercice2

1. f est définie si et seulement si $x \to \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ est définie et si $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| > 0$, autrement dit si et seulement si $x \neq -1$ et $x \neq 1$.
2. L'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0 et
$$f(-x) = ((-x)^2 - 1)\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right| = (x^2-1)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$
En multipliant le numérateur et le dénominateur par -1. Puis comme pour a et b positifs.
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
On a :
$$f(-x) = -(x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = -f(x)$$
Ce qui montre que f est impaire.
3. Comme $t = x - 1$, $t \to 0$ lorsque $x \to 1$.
$$f(1+t) = ((1+t)^2 - 1)\ln\left|\frac{1+t+1}{t}\right| = (1 + 2t + t^2 - 1)(\ln|2+t| - \ln|t|)$$
$$= (2+t)t\ln|2+t| - (2+t)t\ln|t|$$
$$\lim_{t\to 0}(2+t)t\ln|2+t| = 2\ln(2)$$
$$\lim_{t\to 0}(2+t)t\ln|t| = 0 \quad \text{par croissance comparée}$$
Par conséquent
$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} f(1+t) = 2\ln(2)$$
Comme f est impaire
$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\lim_{x\to 1} f(x) = -2\ln(2)$$
4. f est prolongeable par continuité en 1 par $h(1) = 2\ln(2)$
f est prolongeable par continuité en -1 par $h(-1) = -2\ln(2)$.
5. Pour $x \neq 1$.

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-2\ln(2)}{x-1}$$
$$=\frac{(x-1)(x+1)(\ln|x+1|-\ln|x-1|)-2\ln(2)}{x-1}$$
$$=\frac{(x-1)(x+1)(\ln|x+1|-\ln|x-1|)}{x-1}-\frac{2\ln(2)}{x-1}$$
$$=(x+1)(\ln|x+1|-\ln|x-1|)-\frac{2\ln(2)}{x-1}$$
$$=(x+1)\ln|x+1|-(x+1)\ln|x-1|-\frac{2\ln(2)}{x-1}$$
$$=(x+1)\ln|x+1|-\frac{1}{x-1}\big((x+1)(x-1)\ln|x-1|-2\ln(2)\big)$$
$$\lim_{x\to 1}(x+1)\ln|x+1|=2\ln(2)$$
$$\lim_{x\to 1}-\frac{1}{x-1}\big((x+1)(x-1)\ln|x-1|-2\ln(2)\big)=\pm\infty$$

Par conséquent
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\pm\infty$$
Ce qui montre que h n'est pas dérivable en 1.

6.

a. Pour $x>0$, $|x|=x$ donc la dérivée de $x\to\ln|x|$ est $x\to\frac{1}{x}$.

b. pour tout $x\in\mathcal{D}_+$
$$u(x)=\ln\left(\frac{1+x}{|1-x|}\right)-\frac{1}{x}=\ln(x+1)-\ln|x-1|-\frac{1}{x}$$
Si $x\in\,]0,1[$, $x-1<0$ donc $|x-1|=1-x$ et
$$u(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)-\frac{1}{x}$$
Alors
$$u'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1-x)x^2+(1+x)x^2+(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)x^2}$$
$$=\frac{x^2-x^3+x^2+x^3+1-x^2}{(1-x)(1+x)x^2}=\frac{x^2+1}{(1-x)(1+x)x^2}$$
Si $x\in\,]1,+\infty[$, $x-1>0$ donc $|x-1|=x-1$ et
$$u(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)-\frac{1}{x}$$
Alors
$$u'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x^2}$$
On retombe sur le même résultat que lorsque $x\in\,]0,1[$, le résultat est identique.

c. Si $x\in\,]0,1[$ alors $1-x^2>0$ et $u'(x)>0$ donc u est croissante.
Si $x\in\,]1,+\infty[$ alors $1-x^2<0$ et $u'(x)<0$ donc u est décroissante.

d.
$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1+x}{|1-x|}\right)-\frac{1}{x}\right)=\ln(1)=0$$
Et u est décroissante sur $]1,+\infty[$ ce qui montre que $u(x)>0$ sur cet intervalle.
$$\lim_{x\to 0^+}u(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln\left(\frac{1+x}{|1-x|}\right)-\frac{1}{x}\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-}u(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\ln\left(\frac{1+x}{|1-x|}\right)-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

Ce qui montre que u est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $u(\alpha) = 0$, $u(x) < 0$ pour $x \in]0, \alpha[$ et $u(x) > 0$ pour tout $x \in]\alpha, 1[$.

e. Pour tout $x \in \mathcal{D}_+$

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = (x^2-1)(\ln|x+1| - \ln|x-1|)$$

$$f'(x) = 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + (x^2-1)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + (x^2-1)\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}$$

$$= 2x\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2 = 2x\left(\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{x}\right) = 2xu(x)$$

f.

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$		
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$2\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Car si on pose $t = \frac{1}{x} \to 0^+$ lorsque $x \to +\infty$

$$f(x) = (x^2-1)\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)\ln\left|\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}-1}\right| = \frac{1-t^2}{t^2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

$$= \frac{1-t^2}{t}\frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{t} = \frac{1-t^2}{t}\left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t}\right)$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1-t)}{t} = -1$$

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t}\right) = 2$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+}\frac{1-t^2}{t}\left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln(1-t)}{t}\right) = +\infty$$

g.