Examen session 2 automne 2020 fdm1, durée 1 heure.

Exercice 1. Ici i désigne un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1. Déterminer les parties réelles et imaginaire de
$$\delta = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :
$$-z^2 + 2z + i - 1 = 0.$$

Correction exercice 1

1.
$$\delta = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$
La partie réelle de δ est $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et sa partie imaginaire est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Le discriminant est
$$\Delta = 4 - 4(-1)(i-1) = 4 + 4i - 4 = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^2$$
Les deux racines de l'équation sont donc
$$z_1 = \frac{-2 - \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)}{-2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)}{-2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 2. On considère la fonction réelle $f: x \mapsto 1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

1. Donner l'ensemble de définition maximal de f.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f, et calculer la fonction dérivée de f.
3. Déterminer la monotonie de f.
4. Donner le tableau de variation de $f(x) - x$, et résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in [1, +\infty[$.
5. En déduire que l'intervalle $[1, +\infty[$ est stable par f.
6. Soit $u_0 > 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et décroissante.
7. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Correction exercice 2

1. $\sqrt{x}$ doit être strictement positif, donc l'ensemble de définition est $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Sur $\mathbb{R}^{+*}$ f est la somme de deux fonctions dérivables donc est dérivable.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x} > 0$$
$\mathbb{R}^{+*}$ étant un intervalle, la fonction est strictement croissante.
4. On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = f(x) - x$.
$$g'(x) = \frac{1}{2x} - 1 = \frac{1-2x}{x}$$
Sur $\mathbb{R}^{+*}$ $g'(x)$ s'annule une seule fois en $x = \frac{1}{2}$
$$\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty; \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{2-\ln(2)}{4} > 0$$
$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln(x) - x = x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\ln(x) - 1\right)$$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\ln(x) - 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -$ par croissance comparée, donc $g(x) \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$

x	0				$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$+$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-$	$-\infty$
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2-\ln(2)}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

$$g(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{2}\ln(1) - 1 = 0$$

D'après le tableau de variation g est une bijection décroissante de $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ sur $\left[\frac{2-\ln(2)}{4}, -\infty\right[$

On rappelle que $g\left(\frac{2-\ln(2)}{4}\right) > 0$.

Comme $1 > \frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $g(1) = 0$, 1 est la seule solution de $g(x) = 0$, donc de $f(x) = x$.

5. Il faut montrer que $f([1, +\infty[) \subset [1, +\infty[$
   D'après la deuxième question f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $[1, +\infty[$, de plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que :
   $$f([1, +\infty[) \subset \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [1, +\infty[$$
   $[1, +\infty[$ est stable par f.
6. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$
   C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 > 1$.
   L'image de tout $x > 1$ est dans $[1, +\infty[$ d'après la question précédente et ce n'est pas 1 car la seule valeur telle que $f(x) = 1$ est 1, ce qui n'est pas le cas, donc $u_n > 1$ entraine que $u_{n+1} = f(u_n) > 1$, ce qui achève la récurrence donc pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$. La suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$$
   D'après le tableau de variation de g, g est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, donc $g(u_n) < 0$, autrement dit $f(u_n) < u_n$, ce qui équivaut à $u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite est décroissante.
7. Cette suite est décroissante et minorée par 1, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$, c'est-à-dire 1.

Exercice 3. Soit $f: E \to F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. Soit $x \in f^{-1}(B) \cap A$. Montrer que $f(x) \in B$ et $f(x) \in f(A)$. En déduire que :
   $$f(f^{-1}(B) \cap A) \subset B \cap f(A).$$
2. Montrer que réciproquement
   $$B \cap f(A) \subset f(f^{-1}(B) \cap A).$$
   On vient de montrer que $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$. Cette formule est appelée formule de projection.

Correction exercice 3

1. Soit $x \in f^{-1}(B) \cap A$
   $$x \in f^{-1}(B) \cap A \Rightarrow \begin{cases} x \in f^{-1}(B) \\ x \in A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in B \\ f(x) \in A \end{cases} \Rightarrow f(x) \in A \cap B$$
   Cela entraine que
   $$x \in f^{-1}(A \cap B)$$
   Et que donc
   $$f^{-1}(B) \cap A \subset f^{-1}(A \cap B)$$
   On en déduit que
   $$f(f^{-1}(B) \cap A) \subset f\big(f^{-1}(A \cap B)\big)$$
   Comme pour tout ensemble C, $f\big(f^{-1}(C)\big) \subset C$, on a
   $$f(f^{-1}(B) \cap A) \subset B \cap f(A)$$
2. Soit $y \in B \cap f(A)$
   $$y \in B \cap f(A) \Rightarrow \begin{cases} y \in B \\ y \in f(A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in B \\ \exists x \in A, y = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in B \\ \exists x \in A, y = f(x) \\ x \in f^{-1}(B) \end{cases}$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} y \in B \\ \exists x \in A \cap f^{-1}(B), y = f(x) \end{cases} \Rightarrow y \in f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$$
   Ce qui montre que
   $$B \cap f(A) \subset f\big(A \cap f^{-1}(B)\big)$$

Exercice 4. Soit m, n des entiers relatifs premiers entre eux. Montrer que $pgcd(m+n), mn) = 1$.

Indication : Supposer par l'absurde que $pgcd(m+n, mn) > 1$, et considérer un facteur premier.

Correction exercice 4

Soit $d = pgcd(m+n, mn)$, avec $d > 1$, il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$, k et k' premier entre eux tels que

$$\begin{cases} m+n = dk \\ mn = dk' \end{cases}$$

Donc on peut mettre p en facteur dans $m+n$ et dans mn, il existe $u, u' \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} m+n = pu \\ mn = pu' \end{cases}$$

Soit $p >$ un facteur premier commun de $m+n$ et mn

Ce qui entraine que

$$\begin{cases} dk = pu \\ dk' = pu' \end{cases}$$

Comme k et k' n'ont pas de facteur premier commun d divise p

D'autre part

Soit p un facteur premier commun de $m+n$ et mn alors p divise $m+n$ et mn donc p divise d.

Ce qui montre que $p = d > 1$, ce qui est impossible puisque le $pgcd(m, n) = 1$