Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Fondamentaux des mathématiques I — 13 janvier 2021. Durée : 1 heure

---

Seconde Chance

Les exercices sont indépendants les uns des autres

Exercice 1. Ici, i désigne un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1) Déterminer les parties réelle et imaginaire de

$$\delta = e^{i\pi/4}.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$-z^2 + 2z + i - 1 = 0.$$

Exercice 2. On considère la fonction réelle $f : x \longmapsto 1 + \ln \sqrt{x}$.

1. Donner le domaine de définition maximal de f.
2. Donner le domaine de dérivabilité de f, et calculer la fonction dérivée.
3. Déterminer la monotonie de f.
4. Donner le tableau des variations de $f(x) - x$, et résoudre l'équation $f(x) = x$ pour $x \in [1, \infty[$.
5. En déduire que l'intervalle $[1, \infty[$ est stable par f.
6. Soit $u_0 > 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et décroissante.
7. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit A une partie de E et B une partie de F.

1. Soit $x \in f^{-1}(B) \cap A$. Montrer que $f(x) \in B$ et $f(x) \in f(A)$. En déduire que $f(f^{-1}(B) \cap A) \subset B \cap f(A)$.
2. Montrer que réciproquement $B \cap f(A) \subset f(f^{-1}(B) \cap A)$.

On vient de montrer que $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$. Cette formule est appelée *formule de projection.*

Exercice 4. Soient m, n des entiers relatifs premiers entre eux. Montrer que $\text{pgcd}(m + n, mn) = 1$.
[Indication : Supposer par l'absurde que $\text{pgcd}(m + n, mn) > 1$, et en considérer un facteur premier.]