

Seconde Chance (1 h)
Jeudi 16 janvier 2020

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ donnée par $f(x) = 3x + 4$, ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer le point fixe u de f , c'est-à-dire la solution de l'équation $f(u) = u$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $v_n = u_n - u$.
 - (a) Calculer v_0 .
 - (b) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .
 - (c) En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le terme général.
3. En déduire le terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution.

1. $u = f(u) = 3u + 4$ implique $2u + 4 = 0$ et $u = -2$.
2. (a) $v_0 = u_0 - u = 7 - (-2) = 9$.
 - (b) $v_{n+1} = u_{n+1} - u = (3u_n + 4) - u = 3(u_n - u) + 3 = 3v_n + 3$.
 - (c) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de rapport 3. Ainsi $v_n = v_0 \cdot 3^n = 9 \cdot 3^n = 3^{n+2}$.
3. Donc $u_n = v_n + u = v_n - 2 = 3^{n+2} - 2$.

Exercice 2. Calculer $\text{pgcd}(A, B)$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$ définis par

$$A = X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \quad \text{et} \quad B = X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 3.$$

Solution. On applique l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{r} X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \\ X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 3X^2 \\ \hline -X^2 - 2X + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \\ | X^2 \end{array}$$

Le premier reste (sous forme unitaire) est donc $X^2 + 2X - 3$.

$$\begin{array}{r} X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \\ X^3 + 2X^2 - 3X \\ \hline X + 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} | X^2 + 2X - 3 \\ | X \end{array}$$

Le deuxième reste (sous forme unitaire) est donc $X + 3$.

$$\begin{array}{r} X^2 + 2X - 3 \\ X^2 + 3X \\ \hline -X - 3 \\ -X - 3 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | X + 3 \\ | X - 1 \end{array}$$

Puisque le troisième reste est 0, on a $\text{pgcd}(A, B) = X + 3$.

Alternative. On devine $A(-3) = 27 - 2 \cdot 9 - 2^c \text{ dot } 3 - 3 = 0$. Ainsi $X + 3$ divise A . On divise :

$$X^3 + 2X^2 - 2X + 3 = (X + 3)(X^2 - X + 1).$$

Or, les racines de $X^2 - X + 1$ sont les racines primitives sixièmes de l'unité, où j est une racine primitive troisième de l'unité. Ainsi

$$B = (X + 3)(X + j)(X + j^2).$$

On évalue B aux points -3 et $-j$. On a $B(-3) = -243 + 2 \cdot 81 + 2 \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 3 = 0$ et

$$B(j) = -j^2 + 2j + 2 + 2j^2 + 2j + 3 = j^2 + 4j + 5 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 5 \neq 0.$$

Alors $B(j^2) = B(\bar{j}) = \overline{B(j)} \neq 0$. Ainsi le seul facteur irréductible de A qui divise B est $X + 3$, et $\text{pgcd}(A, B) = X + 3$.

Exercice 3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln \frac{1}{x}$.

1. Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer f' sur ce domaine.
2. Rappeler le théorème des accroissements finis.
3. Fixons $x > 0$.

(a) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\ln \frac{x+1}{x} = \frac{1}{c}$.

(b) En déduire que $\frac{1}{x+1} \leq \ln \frac{x+1}{x} \leq \frac{1}{x}$.

4. En déduire la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x}$.

Solution.

1. Pour $r \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^r$ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* est dérivable avec dérivée $x \mapsto r x^{r-1}$ (ici on a $r = -1$), et la fonction $x \mapsto \ln x$ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} est dérivable avec dérivée $x \mapsto 1/x$. Ainsi leur composition f est dérivable, avec $f'(x) = \frac{-x^{-2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x}$.

Alternative. $f(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$, donc $f'(x) = -\frac{1}{x}$.

2. Théorème des accroissements finis (TAF) : Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il y a $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
3. f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc continu sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le TAF il y a donc $c \in]x, x+1[$ tel que

$$-\frac{1}{c} = f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x) = \ln \frac{1}{x+1} - \ln \frac{1}{x} = -\ln \frac{x+1}{x}.$$

Ainsi $\ln \frac{x+1}{x} = \frac{1}{c}$.

4. On a $x < c < x+1$, donc $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} = \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$.
5. Ainsi $\frac{x}{x+1} < x \ln \frac{x+1}{x} < 1$ puisque $x > 0$. Or,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x} = 1$.

Exercice 4. Résoudre $z^2 - (3 + 2i)z + (5 + 5i) = 0$ dans \mathbb{C} .

Solution. Le discriminant vaut

$$\Delta = (3 + 2i)^2 - 4(5 + 5i) = 9 - 4 + 12i - 20 - 20i = -15 - 8i.$$

On pose $\Delta = \delta^2$ avec $\delta = a + ib$. Alors

$$a^2 - b^2 = \operatorname{Re}\Delta = -15, \quad 2ab = \operatorname{Im}\Delta = -8, \quad a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Ainsi $2a^2 = 2$ et $a = \pm 1$. Donc $b = \frac{-8}{2a} = \mp 4$, et $\delta = \pm(1 - 4i)$.

Les deux solutions sont alors

$$z_1 = \frac{3 + 2i + \delta}{2} = \frac{3 + 2i + 1 - 4i}{2} = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3 + 2i - \delta}{2} = \frac{3 + 2i - (1 - 4i)}{2} = 1 + 3i.$$